

Wissenschaftliche Hausarbeit im Rahmen der Ersten Staatsprüfung
für das Lehramt an Hauptschulen und Realschulen im Fach Mathematik,
eingereicht dem Amt für Lehrerbildung – Prüfungsstelle Frankfurt am Main - .

Thema:

Schülerlösungsraum einer Modellierungsaufgabe –

Eine empirische Studie in der Mittelstufe

Verfasserin: Alina Epp

Gutachter: Prof. Dr. Matthias Ludwig

Inhalt

1. Einleitung.....	2
2. Theorie.....	3
2.1 Was ist Modellieren?	3
2.2 Der Modellierungskreislauf	4
2.3 Legitimation von Modellbildung im Unterricht	7
3. Die Studie	11
3.1 Design der Studie.....	11
3.2 Die Aufgabe und ihre unterrichtliche Umsetzung	12
3.3 Eine Musterlösung	14
3.4 Kriterien einer Modellierungsaufgabe	21
4. Empirie	23
4.1 Lösungsansätze	24
4.1.1 Beschreibung der Lösungsansätze	25
4.1.2 Auswertung der Lösungsansätze	44
4.2 Einteilung der Schülerergebnisse in Level	49
4.2.1 Beschreibung der Level	50
4.2.2 Auswertung der erreichten Level.....	65
4.3 Kognitive Hürden	74
4.4 Signifikanz-Test.....	89
5. Schluss.....	92
5.1 Fazit	92
5.2 Rückblick.....	95
5.3 Ausblick.....	100
6. Quellenverzeichnis	101
7. Abbildungsverzeichnis	104
8. Anhang.....	106
9. Versicherung der selbstständigen Anfertigung.....	114

1. Einleitung

Der Titel dieser Arbeit lautet *Schülerlösungsraum einer Modellierungsaufgabe – eine empirische Studie in der Mittelstufe*. Anhand einer selbst entwickelten Modellierungsaufgabe wird untersucht, wie SuS¹ eine Modellierungsaufgabe lösen. Es soll unter anderem geklärt werden, welche Lösungswege die SuS wählen und wo kognitive Hürden liegen. Die Studie wurde an zwei Schulen in Frankfurt am Main durchgeführt - einer Realschule und einer Integrierten Gesamtschule. Insgesamt wurde die Aufgabe von sechs Schulklassen (n=134) bearbeitet, wobei vier zehnte und zwei neunte Jahrgangsstufen betroffen waren.

Der erste Teil der Arbeit befasst sich mit einem kurzen theoretischen Abriss. Es wird geklärt, wie Modellieren definiert ist und warum es in der Schule eingesetzt werden sollte. Im zweiten Teil folgt die Beschreibung der Studie und speziell der Aufgabe. Außerdem wird die unterrichtliche Umsetzung näher beleuchtet. Es folgt der Kern dieser Arbeit, die Auswertung der Schülerergebnisse. Die Erhebungs- und Auswertungsmethode werden erklärt und die Ergebnisse werden analysiert und interpretiert. Dabei wird vor allem auf die Vielfältigkeit der Lösungswege, die Bewertung der Ergebnisse in Form von Einstufungen in Level und auf die Schülerschwierigkeiten bzw. kognitiven Hürden eingegangen. Infolgedessen wird auf die Studie, ihre Ergebnisse und aufgetretene Schwierigkeiten zurückgeblickt und überlegt, wie dieses Pilotprojekt verbessert werden könnte. Abschließend soll ein kleiner Ausblick in weitere interessante Themen gegeben werden, welche über den Rahmen dieser Arbeit hinausgehen und dahingehend nicht fortführend erforscht werden können.

¹ Um ein gutes Leseverständnis zu sichern, wird in dieser Arbeit die männliche Form für Schüler und Lehrer verwendet (die weibliche Form ist natürlich immer mit eingeschlossen). Außerdem wird aus demselben Grund die Abkürzung „SuS“ für Schülerinnen und Schüler und benutzt.

2. Theorie

Diese Studie basiert auf der Theorie des Modellierens. Bevor es zur Auswertung der Schülerergebnisse kommt, soll eine theoretische Fundierung stattfinden. Daher wird zunächst geklärt, was unter *Modellieren* zu verstehen ist. Zudem werden bekannte Modellierungskreisläufe herangezogen, wobei der Kreislauf nach BLUM UND LEISS (2005) im Detail erläutert wird. Weiterhin wird die Legitimation von Modellbildung im Unterricht begründet.

2.1 Was ist Modellieren?

Allgemein gefasst ist mit Modellieren „in der Regel die Arbeit mit Problemen aus der Umwelt gemeint“ (GREEFRATH 2010, S.41). Es werden Probleme aus der Realität beschrieben, dessen Fragestellungen in mathematische Kontexte eingebettet werden (vgl. GREEFRATH 2006, S.8) und die mit mathematischen Methoden gelöst werden sollen. Modellieren kann dadurch folgendermaßen beschrieben werden: „Modellieren ist Abstrahieren der Realität durch mathematische Methoden“ (ebd., S.15). D.h. bezogen auf die vorliegende Modellierungsaufgabe kann mit Hilfe der Mathematik eine Aussage über die Preispolitik der Deutschen Bahn gemacht werden.

Grundlage des Modellierens sind die Aufgaben dieses Typs. Eine Modellierungsaufgabe ist vor allem durch ihre Offenheit und Authentizität gekennzeichnet. Sie beschreibt eine reale Problemsituation, die auf vielfältige Weise mathematisch gelöst werden kann. Ihr Problem ist authentisch und lässt unterschiedliche Lösungswege zu (vgl. SCHUKAJLOW 2011, S.27). Modellierungsaufgaben sind von eingekleideten Aufgaben und von Sachaufgaben zu unterscheiden. Letztere beschreiben meist künstliche Probleme, die nur erstellt werden, um mathematische Aufgaben zu entwickeln. Außerdem wird oft genau das abgefragt, was gerade erlernt wurde. Zudem gibt es meist ein klar definiertes Ergebnis. Modellierungsaufgaben sind jedoch, so wie sie gestellt werden, tatsächlich in der Realität wiederzufinden, wodurch ihre Lösung an Bedeutung gewinnt, da sie faktisch relevant sein kann. Dieser Aufgabentyp ist in allen möglichen Kontexten wiederzufinden. Jeder sozialer und kultureller Kontext kann Mathematik enthalten (vgl. ALSINA 2007). Der Mathematikunterricht wird dadurch in gewisser Weise fächerübergreifend und vermittelt nicht nur fachspezifisches Wissen, sondern auch ein Stück weit Allgemeinbildung. Außerdem stellen Modellierungsaufgaben offene

Aufgaben dar, d.h. sie können auf sehr unterschiedliche Weisen gelöst werden und müssen deshalb nicht mit Hilfe dessen gelöst werden, was zuletzt gelernt wurde. Zudem zielen die Aufgaben eher auf Annäherungen ab, statt auf klar definierte Resultate. Modelle werden entwickelt, um möglichst nah an das gesuchte Ergebnis zu gelangen. Wie exakt dieses erreicht wird, hängt von der Validierung ab.

2.2 Der Modellierungskreislauf

Um realitätsbezogene Aufgaben wie die vorliegende Bahn-Aufgabe lösen zu können, bedarf es dem Modellierungskreislauf. Diese Arbeit bezieht sich – auch bei der Auswertung der Schülerergebnisse - auf den von BLUM UND LEISS (2005) entwickelten Modellierungskreislauf.

„Dabei werden Probleme aus der Lebenswirklichkeit in die Sprache der Mathematik übersetzt, innermathematisch gelöst und anschließend die Angemessenheit der Lösung in Bezug auf das reale Problem überprüft.“ (SCHMIDT 2010, S.11f.)

Wie das Wort schon sagt, handelt es sich dabei um einen Kreislauf.

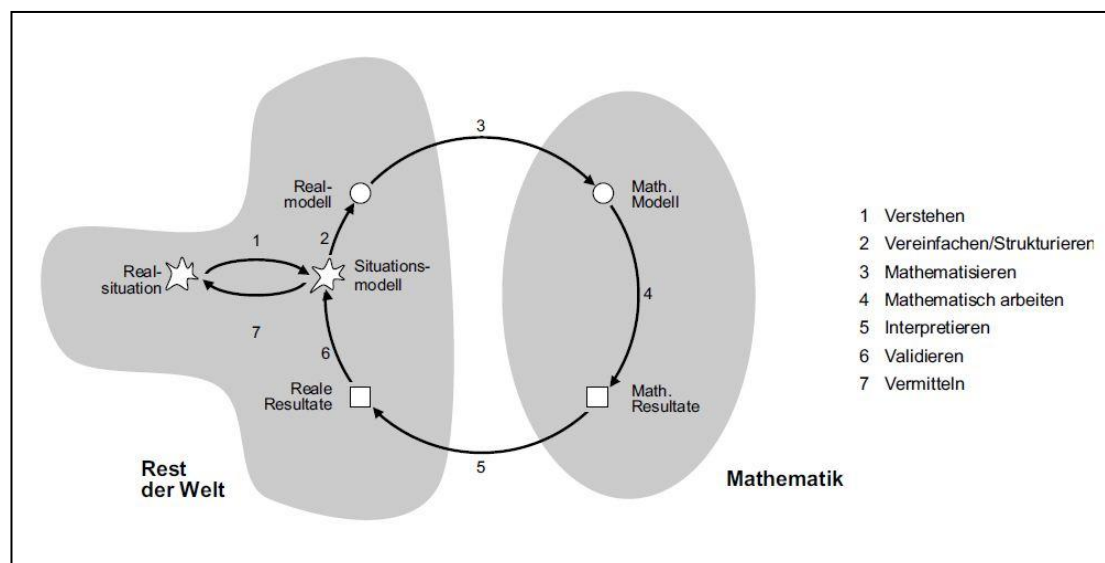


Abb. 1: Modellierungskreislauf nach BLUM UND LEISS (2005), Quelle: BLUM 2006b, S.9.

Der Kreislauf nach BLUM UND LEISS (2005) beinhaltet die einzelnen Teilschritte, die bei einer Modellierungsaufgabe durchlaufen werden. Den Kernpunkt des Kreislaufes stellen sowohl der Schritt vom Realmodell zum mathematischen Modell als auch der Schritt zurück von der Mathematik zur Realität dar (vgl. BLUM 1993, S.V).

Begonnen wird mit der Realsituation. Diese beschreibt das zu lösende Problem bzw. leitet die Aufgabenstellung ein. Der erste Schritt besteht darin, diese Realsituation zu

verstehen. Die SuS lesen die Aufgabe und bilden ein mentales Abbild der Situation. D.h. sie lesen die Aufgabe wahrscheinlich so oft, bis sie sich mental vorstellen können, worum es bei dem Problem geht. Es resultiert das Situationsmodell. Dieses besteht lediglich aus der mentalen Vorstellung. Damit ist noch keine Skizze oder Ähnliches gemeint, da es sich um keinen aktiven Prozess, sondern eher um das intuitive Verständnis der Situation handelt. Dieses Situationsmodell gilt es zu vereinfachen bzw. zu strukturieren. Zunächst wird das mentale Abbild in Form einer Skizze auf das Papier gebracht. Dazu werden wichtige Informationen aus der Aufgabenstellung herausgefiltert und individuelles Wissen ergänzt. Es entsteht ein Realmodell, das auf Papier gebracht wurde und alle nötigen Aspekte enthält, um die Aufgabe zu lösen. Im nächsten Schritt wird das Realmodell mathematisiert. Dieser Schritt ist besonders wichtig. Nun wird die Situation von der realen Welt in die mathematische Welt übersetzt. Um das Problem zu lösen werden bekannte Operationen abgerufen und angewendet. Terme, Formeln, Gleichungen, Graphiken oder Ähnliches werden verwendet. Falls eine Skizze erstellt wurde, wird diese nun mit mathematischen Symbolen ausgestattet. Dadurch, dass das Situationsmodell auf die mathematische Ebene gebracht wird, entwickelt es sich zum Mathematischen Modell. Es enthält alle Informationen, die zum Mathematischen Arbeiten notwendig sind. Mit den eben abgerufenen Operationen folgt nun dessen Ausführung, d.h. es wird gerechnet. Bei der Rechnung werden (mehr oder weniger bewusst) heuristische Strategien angewendet. Das Ergebnis dieses Schrittes ist das Mathematische Resultat. Das Problem ist damit mathematisch gelöst. Die Lösung kann dabei aber aus einer Zahl ohne Einheit oder ähnlichem bestehen. D.h. ein Außenstehender würde mit der Zahl an sich nichts anfangen können. Um das zu ändern, gilt es, dieses Ergebnis zurück von der mathematischen Welt in die reale Welt zu übersetzen, indem es interpretiert wird. An dieser Stelle werden dem Ergebnis nötige Einheiten zugefügt und es entsteht z.B. ein Antwortsatz, der die Fragestellung aus der Aufgabe beantwortet. Damit wird aus dem mathematischen Ergebnis ein reales Resultat, da die zuvor erhaltene Zahl eine Bedeutung erhält. Nun wird die gewonnene Erkenntnis wieder auf das Situationsmodell bezogen. Dafür wird das zuvor entwickelte Situationsmodell erneut abgerufen und das reale Resultat wird darauf zurückgekoppelt, wobei das reale Resultat validiert wird. Es soll überprüft werden, inwiefern die erhaltene Lösung sinnvoll erscheint bzw. ob das zugrundeliegende Modell zweckmäßig entwickelt wurde. Dafür wird das Ergebnis beispielsweise

verglichen oder an einer vorliegenden Antwort auf Richtigkeit überprüft. Ist das Ergebnis unbefriedigend, müssen Teilschritte oder sogar der ganze Prozess erneut (möglicherweise auch mehrere Male) durchlaufen werden, bis das Ergebnis exakt genug erscheint. Lässt sich die Fragestellung mit dem realen Resultat schließlich hinreichend beantworten, gilt es dieses zu vermitteln. Im letzten Schritt des Modellierungsprozesses wird deshalb die Lösung bezogen auf die Realsituation beschrieben. Es soll dargestellt bzw. präsentiert werden, wie die Aufgabenstellung bearbeitet wurde und verdeutlicht werden, welche Annahmen getroffen wurden, die zu diesem Ergebnis führten. Mit diesem Schritt wurde der Kreislauf ein vollständiges Mal durchlaufen. (Vgl. GREEFRATH 2010, S.52; LEISS 2007, S.32f.; SCHUKAJLOW 2011, S.78-82)

SuS durchlaufen den Modellierungskreislauf im Idealfall geordnet. D.h. sie beginnen bei der Realsituation, die sie verstehen, und arbeiten sich Schritt für Schritt entlang aller Teilschritte bis zum letzten Schritt des Vermittelns vor, mit dem der Kreislauf geschlossen wird. Doch dies ist nicht immer der Fall. Oft werden z.B. Zwischenschritte ausgelassen oder bei der Rechnung begonnen, ohne vorher ein Realmodell gebildet zu haben (vgl. GREEFRATH 2006, S.16). Die SuS weisen meist eine nicht lineare Herangehensweise auf und folgen trotz kreislaufförmigem Schema individuellen Lösungswegen (vgl. HAINES 2009), die nicht immer alle Teilschritte mit einbeziehen. Allerdings wäre es hilfreich, den SuS den Kreislauf bei der Aufgabenlösung als Hilfestellung anzubieten, da ihnen dadurch ein Schema an die Hand gegeben wird, mit Hilfe dessen sie sich schrittweise an die Lösung herantasten können. Außerdem können vom Lehrenden geeignete Teilaufgaben gestellt werden, die sich den Schritten anpassen. Teilkompetenzen können dadurch gezielt gefördert werden (vgl. BLUM 2006b, S.13). Dadurch durchlaufen die SuS den kompletten Modellierungskreislauf und es können gezielte Hilfestellungen bei den einzelnen Teilschritten gegeben werden, die Schwierigkeiten bereiten.

An dieser Stelle soll erwähnt werden, dass es neben dem Modellbildungskreislauf von BLUM UND LEISS noch weitere Darstellungen gibt, die den Lösungsprozess von Modellierungsaufgaben beschreiben. Sie ähneln im Wesentlichen dem von BLUM UND LEISS. Überall werden Realität und mathematische Welt durch die gegenseitige Beeinflussung miteinander verbunden. Unterschiede lassen sich unter anderem in den Teilschritten feststellen. Diese werden beispielsweise nicht immer kreisförmig

beschrieben, sondern auch mal spiralförmig (siehe Modellbildungsspirale nach BÜCHTER und LEUDERS). Gelegentlich werden die Teilschritte auch anders benannt, indem einige beispielsweise zusammengefasst werden (siehe Modellbildungskreislauf nach BLUM 1985) oder indem sie detaillierter beschrieben werden (siehe Modellbildungsprozess nach FISCHER UND MALLE). Im Wesentlichen beschreiben aber alle einen mehr oder weniger kreisförmigen Durchlauf, bei dem bestimmte Schritte gemacht werden, die zu einer Lösung der Modellierungsaufgabe führen.

2.3 Legitimation von Modellbildung im Unterricht

Im Mittelpunkt dieser Studie soll die Untersuchung des Schülerlösungsraumes einer Modellierungsaufgabe stehen. Bevor dies geschieht, muss jedoch geklärt werden, wieso Modellierungsaufgaben überhaupt an Schulen durchgeführt werden sollten. Diese Forderung lässt sich zum einen aus fachdidaktischer Sicht begründen und zum anderen stellt Modellieren eine Kompetenz dar, die fest in den Bildungsstandards verankert ist.

Zunächst soll die Begründung über die Bildungsstandards erläutert werden. Diese zählen Modellieren zu den Kompetenzen, die erlernt werden müssen. Wie wichtig Modellieren ist, wurde durch die PISA-Studie festgestellt. Demnach weisen deutsche SuS „beträchtliche Defizite in Bezug auf ‘Mathematical Literacy‘“² (BLUM 2006b, S.8) auf. Dies ist dadurch entstanden, dass die SuS vor PISA noch keine Erfahrung mit Modellierungsaufgaben hatten. Um also besser bei der Studie abzuschneiden, müssen sie das Modellieren erlernen. Auch die TIMSS-Studie hat gezeigt, dass die SuS bei komplexen Aufgaben, die Mathematisches Modellieren oder Problemlösen fordern, scheiterten (vgl. ROTH 2010, S.516). Um diese Defizite zu beheben, wurde Modellieren als mathematische Kompetenz ab dem Schuljahr 2004/2005 für den Mittleren Abschluss und ab dem Schuljahr 2005/2006 für den Hauptschulabschluss fest in den jeweiligen Bildungsstandards verankert. Mathematisches Modellieren ist neben weiteren fünf Kompetenzen eine wichtige Fertigkeit, die SuS am Ende ihrer Schulzeit erworben haben sollten. Das Problemlösen kommt dem Modellieren sehr nahe. Beide Kompetenzen stimmen in dem Punkt überein, dass Ergebnisse überprüft

² Mit „Mathematical Literacy“ ist im Wesentlichen die Fähigkeit zwischen Realität und Mathematik zu übersetzten gemeint, was unserem Verständnis von Modellieren entspricht.

werden müssen. In den Bildungsstandards wird Mathematisches Modellieren folgendermaßen beschrieben:

„(K3) Mathematisch modellieren

Dazu gehört:

- Bereiche oder Situationen, die modelliert werden sollen, in mathematische Begriffe, Strukturen und Relationen übersetzen,*
- In dem jeweiligen mathematischen Modell arbeiten,*
- Ergebnisse in dem entsprechenden Bereich oder der entsprechenden Situation interpretieren und prüfen.“*

Die Kompetenz stimmt sowohl für den Hauptschulabschluss sowie für den Mittleren Schulabschluss mit der obigen Beschreibung wortgetreu überein. (Vgl. Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Hauptschulabschluss, Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss) Zu dieser Kompetenz gehören also die Fertigkeiten, mathematische Modelle zu erstellen, sie zu übersetzen, mit ihnen zu rechnen und dessen Ergebnisse zu interpretieren und zu prüfen. All diese Punkte sind Teil des Modellierungskreislaufes nach BLUM UND LEISS (2005). Vor allem das Übersetzen ist eine wichtige Eigenschaft des Modellierens. Denn dabei wird eine Verbindung zwischen der realen Welt und der mathematischen Welt hergestellt. Diese Verbindung wahrzunehmen, ist für die SuS sehr wichtig. Dadurch erfahren sie, wie Mathematik für den Alltag angewendet werden kann, was ihnen bei eingekleideten Aufgaben beispielsweise oft fehlt.

Die erworbenen Modellierungskompetenzen sind deshalb nicht nur für die Schule relevant. Dort werden sie erlernt. Gebraucht werden sie aber auch außerhalb der Schule. Wir treffen beispielsweise in den Medien oft auf Modelle. Diese gilt es

„zu verstehen und kritisch zu hinterfragen. Die nötige Kompetenz dazu kann nur aufgebaut werden, wenn die Schülerinnen und Schüler während ihrer Schulzeit selbstständig eigene Modellierungen durchgeführt haben und somit über die nötigen Erfahrungen verfügen.“ (MAAB 2007, S.8)

Kennen die SuS Modelle aus der Schule, können sie diese auch im Alltag anwenden. Und mit einfachen Modellierungsbeispielen kann nicht früh genug begonnen werden (vgl. HENN 2005, S.82). Denn durch das Erlernen dieser Kompetenz kann das Ziel erreicht werden, dass die SuS zu mündigen Bürgern werden, die die Modellierungskompetenz beherrschen und mit ihr wichtige Entscheidungen treffen und somit Verantwortung tragen können (vgl. HENN 2005, S.90).

Nach der Legitimation durch die Bildungsstandards soll nun auch die fachdidaktische Perspektive näher beleuchtet werden. An dieser Stelle sei zunächst WINTER (2003) zu erwähnen, der drei Grunderfahrungen formuliert hat, die der Mathematikunterricht ermöglichen können sollte.

*„(1) Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen,
(2) mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen,
(3) in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinaus gehen, (heuristische Fähigkeiten) zu erwerben.“ (WINTER 2003, S.7)*

Mit Erfüllung dieser drei Grunderfahrungen soll eine Allgemeinbildung erlangt werden. Bezogen auf das Modellieren ist vor allem der erste Punkt von Bedeutung. Erst durch das Erfahren von Mathematik im Alltag erscheint die Modellbildung interessant. Dabei werden alltägliche Erfahrungen mit der Mathematik verbunden und durch sie geklärt. Die Integration von Realitätsbezügen in den Mathematikunterricht wird dadurch immer entscheidender. Auch die anderen beiden Punkte werden beim Modellieren erfüllt. Besonders der Dritte entspricht dem Modellieren, da es dabei um Probleme geht, die auch außerhalb der Mathematik zu finden sind.

Neben WINTER nennt auch BLUM einige Gründe, die das Modellieren im Unterricht rechtfertigen. Als pragmatisches Argument nennt er die Tatsache, dass nur durch den Einbezug der Realität in den Mathematikunterricht zum Umweltverstehen, zur Alltagsbewältigung und zur Berufsvorbereitung beigetragen werden könne. Außerdem sei der Realitätsbezug aus formalen Gründen zur Entwicklung der Modellierungskompetenz unentbehrlich. Zudem unterstützt er die SuS aus lernpsychologischer Sicht im Verstehen von Mathematik und motiviert dadurch sehr. Als kulturbezogenen Grund, Modellieren in den Schulalltag zu integrieren, weist er auf, dass der Realitätsbezug für SuS unerlässlich sei, um ein Bild von Mathematik bei ihnen aufzubauen. All diese Gründe rechtfertigen seiner Meinung nach den Einbezug von Realität, und damit das Modellieren, in den Mathematikunterricht. (Vgl. BLUM 2006b, S.11)

Eine interessante Studie von KATJA MAAB zur Integration von Modellieren in den Schulalltag bzw. zur Entwicklung von Modellierungskompetenzen soll hier nur kurz ergänzend erwähnt werden. Sie hat 35 SuS über einen Zeitraum von 15 Monaten beobachtet. Dabei hat sie feststellen können, dass zum Ende hin fast alle SuS in der Lage waren, Modellierungsaufgaben zu lösen, sodass gesagt werden kann, die Modellierungskompetenz könne im Mathematikunterricht durch den Realitätsbezug erlernt werden. (Vgl. MAAB 2006, S.124,128) Diese Erkenntnis bekräftigt die Forderung, Modellieren im Rahmen des Mathematikunterrichts in den Schulalltag einzubetten.

Sei es die Vorgabe durch die Schule oder der Gebrauch im Alltag – Modellieren wird immer wichtiger. Das zeigen sowohl die Bildungsstandards als auch die fachdidaktischen Begründungen von WINTER und BLUM. Deshalb sollte deutlich werden, dass mathematisches Modellieren heutzutage von Wichtigkeit geprägt ist und aus dem Mathematikunterricht nicht mehr wegzudenken scheint (vgl. LINGEFJÖRD 2006, S.96).

3. Die Studie

Zu Beginn wird der Rahmen der Studie vorgestellt. Es folgt die Beschreibung der Aufgabe und ihrer Durchführung an den Schulen. Weiterhin wird eine Musterlösung vorgestellt. Abschließend soll untersucht werden, ob die Bahn-Aufgabe die Kriterien einer Modellierungsaufgabe erfüllt.

3.1 Design der Studie

Mit dieser Studie wird der Schülerlösungsraum einer Modellierungsaufgabe in der Mittelstufe untersucht. Dazu wurde zunächst eine Aufgabe entwickelt und eine Unterrichtseinheit erstellt. Diese wurde an zwei Schulen mit insgesamt 134 SuS aus sechs Klassen durchgeführt. Deren Ergebnisse sollen anschließend ausgewertet werden. Die Repräsentativität der Auswertung ist mit $n=134$ gegeben. Natürlich wäre eine Studie mit mehr SuS aussagekräftiger, doch im Rahmen einer Wissenschaftlichen Hausarbeit ist die Teilnahme von 134 SuS ausreichend. Die Erste der beiden Schulen ist eine zweigliedrige Realschule. Beide neunten und zehnten Klassen dieser Schule haben die Modellierungsaufgabe bearbeitet. Die 9a hat eine Klassenstärke von 27 SuS (10 Mädchen, 17 Jungen), die 9b umfasst 26 SuS (15 Mädchen, 11 Jungen), die 10a hat 19 SuS (10 Mädchen, 7 Jungen, bei 2 SuS fehlen die Angaben) und die 10b besuchen 24 SuS (10 Mädchen, 14 Jungen). Die zweite Schule ist eine Integrierte Gesamtschule, die den Hauptschulabschluss, Realschulabschluss und den Übergang in die Klasse 11 ermöglicht. Ab der siebten Klasse findet im Fach Mathematik eine Differenzierung statt, bei der die SuS in Grund- oder Erweiterungskurse eingeteilt werden. An dieser Studie hat die zehnte Jahrgangsstufe teilgenommen, die aus 14 SuS des G-Kurses (9 Mädchen, 5 Jungen) und 24 SuS des E-Kurses (9 Mädchen, 14 Jungen, bei einem Schüler fehlt die Angabe) besteht.

Tabelle 1: Übersicht über die an der Studie teilnehmenden SuS.

Schule		Geschlecht			Klassenstufe		Alter					
A	B	m	w	o.A.	Neunte	Zehnte	13 Jahre	14 Jahre	15 Jahre	16 Jahre	17 Jahre	o.A.
38	96	68	63	3	53	81	2	25	56	39	8	4

Die Studie wurde mit diesen beiden Klassenstufen durchgeführt, da davon auszugehen ist, dass sie das breiteste Wissen innerhalb der Mittelstufe haben, auf das zurückgegriffen werden kann. Dadurch soll eine möglichst große Vielfalt an

Schülerlösungen erhalten werden, da die Aufgabe auf sehr viele Weisen gelöst werden kann.

Zur Auswertung der Schülerergebnisse wurde einzig und allein das Lösungsblatt der SuS verwendet. Notizen oder Ähnliches, die auf den anderen Arbeitsblättern notiert wurden, werden nicht mit einbezogen. An manchen Stellen werden Beobachtungen dokumentiert, die während der Arbeitszeit gemacht wurden. Die SuS hatten eine Schulstunde (45 Minuten) zur Bearbeitung der Aufgabe Zeit.

3.2 Die Aufgabe und ihre unterrichtliche Umsetzung

Die Modellierungsaufgabe beinhaltet eine selbst konstruierte Fragestellung zur Deutschen Bahn. „Bei der Neu-Konstruktion von Aufgaben ist es wichtig, sozusagen mit offenen Augen durch die Welt zu gehen und die überall vorhandene Mathematik zu entdecken.“ (BLUM 2006a, S.26) So lässt sich auch bei der Deutschen Bahn Mathematik entdecken. Die SuS sollen herausfinden, wie ihr Preisgenerator funktioniert. Die Aufgabenstellung wird in ein Video eingebettet, das die SuS insgesamt zwei Mal sehen. In dem Video wird eine Situation beschrieben, in der sich drei Freundinnen aus München, Frankfurt und Berlin treffen wollen. Die Orte wurden gewählt, da zwischen München und Berlin eine recht lange ICE Strecke besteht. Frankfurt liegt etwa in der Mitte und drückt als Wohnort der SuS eine gewisse Schülernähe aus. In dem Video wollen die Mädchen aus München und Frankfurt mit demselben ICE nach Berlin fahren. Die Strecke von München nach Berlin ist 1029km lang und kostet 135€³. Von Frankfurt nach Berlin sind es 601km, die 118€ kosten. Wie kann es aber sein, dass eine Strecke, die fast doppelt so lang ist, nicht doppelt so viel kostet, sondern nur 17€ teurer ist? Mit dieser Situation werden die SuS konfrontiert und aufgefordert, den Preisgenerator der Deutschen Bahn zu erfassen. Als Hilfsmittel dienen ihnen der Flyer des ICE 598 von München nach Berlin, eine Deutschlandkarte mit der eingezeichneten Strecke des Zuges und eine Tabelle mit Teilstrecken und dessen Preisangaben. Außerdem dürfen sie einen Taschenrechner verwenden, um nicht zu viel Zeit mit einfachen Additionsaufgaben zu verbringen. Beherrschen die SuS das Operieren mit dem Rechner, kann der Schwerpunkt nämlich auf den Denkprozess verlagert werden (vgl. SILLER 2009, S.6),

³ Alle aufgeführten Ticketpreise gelten für den ICE 598. Die Teilstrecken von München nach Berlin können natürlich auch mit anderen Bahnen, wie z.B. der Regionalbahn, gefahren werden und es gibt auch die Optionen der Sparpakete, Bahncard usw., wodurch andere Ticketpreise entstehen würden. Alle diese Optionen werden für die Modellierungsaufgabe ignoriert.

wodurch wertvolle Zeit eingespart wird. Zur Bearbeitung stehen 45 Minuten zur Verfügung. Da die Studie anonym durchgeführt werden soll, werden nur Klasse, Alter und Geschlecht angegeben. Anhand dieser Kriterien wird im empirischen Teil der Arbeit eine Auswertung stattfinden.

Die Unterrichtsstunde beginnt damit, dass den SuS zunächst erklärt wird, was auf sie zukommen wird. Ihnen wird gesagt, dass es um die Ticketpreise der Deutschen Bahn geht. Sie sehen dazu das erstellte Video und bekommen alle (eben beschriebenen) Hilfsmittel gestellt. Nachdem das Video ein Mal gezeigt wurde, wird die Aufgabenstellung nochmal genauer erklärt. Die beschriebene Situation der drei Freundinnen wird wiederholt, um zu gewährleisten, dass verstanden wird, worum es in der Aufgabe geht. Daraufhin sehen die SuS das Video ein weiteres Mal und beginnen dann mit der Lösung der Aufgabe. Die Bearbeitung der Aufgabe erfolgt in einer Mischung aus Einzelarbeit und Partnerarbeit. Partnerarbeit ist dann erlaubt, wenn es um den Austausch von Ideen geht. Denn Modellierungsaufgaben sind offene Aufgaben, die mehrere Lösungen erlauben. Und durch den Austausch mit dem Partner gelangen die SuS in der Kürze der Zeit womöglich auf eine Lösungsidee, die beiden als hilfreich erscheint. Es soll aber keine Gruppenlösung oder ähnliches abgegeben werden. Jeder Schüler sollte seine eigene Lösung notieren und diese abgeben. Denn durch die Studie soll eine Aussage über den Lösungsraum der SuS gemacht werden und das ist nur möglich, wenn von jedem Schüler individuelle Lösungen vorliegen, die ausgewertet werden. Daher erfolgt die schriftliche Bearbeitung der Aufgabe in Einzelarbeit und nur der Austausch von Ideen darf zu Beginn der Stunde in Partnerarbeit stattfinden. Bei Fragen steht die Lehrkraft zur Verfügung. Vor allem beim Lesen und Verstehen des Flyers bedarf es der Hilfe der Lehrkraft. Sie soll natürlich nicht zu stark intervenieren, darf aber kleine Hilfestellungen geben, solange sie dem Schüler die Freiheit lässt, die Aufgabe auf seine eigene Weise zu lösen. Je weniger Unterstützung der Lehrende gibt, desto eigenständiger arbeiten die SuS. Außerdem muss jede Klassen die gleichen Hilfen bekommen, um eine objektive Vergleichsanalyse zu gewährleisten. Daher sollten die SuS den Modellierungsprozess möglichst selbstständig durchlaufen, bei Hürden wie Verständnisfragen o.ä. aber nachfragen können.

3.3 Eine Musterlösung⁴

Bevor die Ergebnisse der SuS ausgewertet werden, soll ein möglicher Lösungsansatz vorgestellt werden. Denn sobald ein Einzelner eine Modellierungsaufgabe entwickelt, hat derjenige auch eine eigene Vorstellungen davon, wie sie gelöst werden kann. Ihm fehlt aber noch das Bild für das Ganze, d.h. er kann nicht wissen, auf welche möglichen anderen Weisen die SuS die Aufgabe lösen. Denn neben der Musterlösung gibt es noch viele andere Lösungsmöglichkeiten, die erst bewusst werden, nachdem die SuS mit der Aufgabe gearbeitet haben. Es ist daher auch nicht zu erwarten, dass die SuS die Aufgabe so lösen, wie die Musterlösung es vorgibt. Jeder Schüler wählt seinen eigenen Ansatz. Mit der Musterlösung soll lediglich gezeigt werden, was mit der Aufgabe erreicht werden kann bzw. auf welche Weise sie gelöst werden könnte.

Nun wird die Bahn-Aufgabe schrittweise gelöst.

1. Schritt „Übersicht der Strecken in Form einer Tabelle erstellen“: Um eine Übersicht über die gesamte ICE-Strecke zu erhalten, werden alle Kombinationen der Teilstrecken aufgelistet und mit Preis- und Streckenangabe aufgeführt. Der Preis kann über die Internetseite der Deutschen Bahn ermittelt werden. Die Streckenlängen können mit Hilfe des Flyers, der alle Teilstreckenlängen angibt, berechnet werden. Da für manche Teilstrecken keine Preisauskunft über das Internet möglich ist, werden diese aus der Liste entfernt. Es entsteht eine nach dem Preis sortierte Tabelle.

⁴ Mit „Musterlösung“ ist nur *eine* mögliche Art gemeint, wie die Aufgabe gelöst werden kann. Sie ist nicht die einzige richtige Möglichkeit, und soll daher nur als Muster dienen, um einen Blick für die Aufgabe und dessen Lösung zu gewinnen.

Tabelle 2: Übersicht aller Strecken nach Streckenlänge sortiert.

Stand vom 28.08.2012			
ICE 598 München Hbf - Stuttgart Hbf - Frankfurt (Main) Hbf - Berlin Ostbahnhof			
Von	Nach	Strecke in km	Preis in €
Frankfurt (Main) Hbf	Hanau Hbf	23	13,00
Hildesheim Hbf	Braunschweig Hbf	42	14,00
Kassel-Wilhelmshöhe	Göttingen	45	19,50
München-Pasing	Augsburg Hbf	55	17,50
München Hbf	Augsburg Hbf	62	20,00
Mannheim Hbf	Frankfurt (Main) Hbf	79	27,00
Hanau Hbf	Fulda	81	21,00
Augsburg Hbf	Ulm Hbf	87	23,00
Fulda	Kassel-Wilhelmshöhe	90	30,00
Ulm Hbf	Stuttgart Hbf	93	25,00
Göttingen	Hildesheim Hbf	100	25,50
Mannheim Hbf	Hanau Hbf	102	30,00
Frankfurt (Main) Hbf	Fulda	104	30,00
Stuttgart Hbf	Mannheim Hbf	107	37,00
Fulda	Göttingen	135	33,00
München-Pasing	Ulm Hbf	142	36,00
Göttingen	Braunschweig Hbf	142	32,00
Kassel-Wilhelmshöhe	Hildesheim Hbf	145	36,00
München Hbf	Ulm Hbf	149	36,00
Hanau Hbf	Kassel-Wilhelmshöhe	171	45,00
Augsburg Hbf	Stuttgart Hbf	180	42,00
Mannheim Hbf	Fulda	183	48,00
Stuttgart Hbf	Frankfurt (Main) Hbf	186	59,00
Kassel-Wilhelmshöhe	Braunschweig Hbf	187	46,00
Frankfurt (Main) Hbf	Kassel-Wilhelmshöhe	194	51,00
Braunschweig Hbf	Berlin-Spandau	199	56,00
Ulm Hbf	Mannheim Hbf	200	52,00
Stuttgart Hbf	Hanau Hbf	209	60,00
Braunschweig Hbf	Berlin Hbf	214	56,00
Hanau Hbf	Göttingen	216	48,00
Braunschweig Hbf	Berlin Ostbahnhof	220	56,00
München-Pasing	Stuttgart Hbf	235	54,00
Fulda	Hildesheim Hbf	235	49,00
Frankfurt (Main) Hbf	Göttingen	239	61,00
Hildesheim Hbf	Berlin-Spandau	241	64,00
München Hbf	Stuttgart Hbf	242	54,00
Hildesheim Hbf	Berlin Hbf	256	64,00
Hildesheim Hbf	Berlin Ostbahnhof	262	64,00
Mannheim Hbf	Kassel-Wilhelmshöhe	273	66,00
Fulda	Braunschweig Hbf	277	60,00
Ulm Hbf	Frankfurt (Main) Hbf	279	66,00
Augsburg Hbf	Mannheim Hbf	287	67,00
Stuttgart Hbf	Fulda	290	66,00
Ulm Hbf	Hanau Hbf	302	69,00
Hanau Hbf	Hildesheim Hbf	316	61,00
Mannheim Hbf	Göttingen	318	74,00
Frankfurt (Main) Hbf	Hildesheim Hbf	339	78,00
Göttingen	Berlin-Spandau	341	77,00
München Hbf	Mannheim Hbf	349	80,00
Göttingen	Berlin Hbf	356	77,00

Hanau Hbf	Braunschweig Hbf	358	75,00
Göttingen	Berlin Ostbahnhof	362	77,00
Augsburg Hbf	Frankfurt (Main) Hbf	366	73,00
Stuttgart Hbf	Kassel-Wilhelmshöhe	380	84,00
Frankfurt (Main) Hbf	Braunschweig Hbf	381	85,00
Ulm Hbf	Fulda	383	73,00
Kassel-Wilhelmshöhe	Berlin-Spandau	386	89,00
Augsburg Hbf	Hanau Hbf	389	78,00
Kassel-Wilhelmshöhe	Berlin Hbf	401	89,00
Kassel-Wilhelmshöhe	Berlin Ostbahnhof	407	89,00
Mannheim Hbf	Hildesheim Hbf	418	84,00
München-Pasing	Frankfurt (Main) Hbf	421	95,00
Stuttgart Hbf	Göttingen	425	91,00
München-Pasing	Hanau Hbf	444	95,00
München Hbf	Hanau Hbf	451	95,00
Mannheim Hbf	Braunschweig Hbf	460	94,00
Ulm Hbf	Kassel-Wilhelmshöhe	473	94,00
Fulda	Berlin-Spandau	476	95,00
Fulda	Berlin Hbf	491	95,00
Fulda	Berlin Ostbahnhof	497	95,00
Ulm Hbf	Göttingen	518	97,00
Stuttgart Hbf	Hildesheim Hbf	525	111,00
Hanau Hbf	Berlin-Spandau	557	110,00
Stuttgart Hbf	Braunschweig Hbf	567	117,00
Hanau Hbf	Berlin Hbf	572	110,00
Hanau Hbf	Berlin Ostbahnhof	578	110,00
Frankfurt (Main) Hbf	Berlin-Spandau	580	118,00
Frankfurt (Main) Hbf	Berlin Hbf	595	118,00
Frankfurt (Main) Hbf	Berlin Ostbahnhof	601	118,00
Ulm Hbf	Hildesheim Hbf	618	107,00
Mannheim Hbf	Berlin-Spandau	659	124,00
Ulm Hbf	Braunschweig Hbf	660	117,00
Mannheim Hbf	Berlin Hbf	674	124,00
Mannheim Hbf	Berlin Ostbahnhof	680	124,00
Augsburg Hbf	Hildesheim Hbf	705	117,00
Augsburg Hbf	Braunschweig Hbf	747	125,00
München-Pasing	Hildesheim Hbf	760	125,00
Stuttgart Hbf	Berlin-Spandau	766	129,00
München Hbf	Hildesheim Hbf	767	125,00
Stuttgart Hbf	Berlin Hbf	781	135,00
Stuttgart Hbf	Berlin Ostbahnhof	787	135,00
München-Pasing	Braunschweig Hbf	802	131,00
München Hbf	Braunschweig Hbf	809	131,00
Ulm Hbf	Berlin-Spandau	859	135,00
Ulm Hbf	Berlin Hbf	874	135,00
Ulm Hbf	Berlin Ostbahnhof	880	135,00
Augsburg Hbf	Berlin-Spandau	946	135,00
Augsburg Hbf	Berlin Ostbahnhof	967	135,00
München-Pasing	Berlin-Spandau	1001	134,00
München Hbf	Berlin-Spandau	1008	134,00
München-Pasing	Berlin Ostbahnhof	1022	135,00
München Hbf	Berlin Ostbahnhof	1029	135,00

2. Schritt „Diagramm aus der Tabelle generieren“: Ergänzend zu der Tabelle wird ein Diagramm erstellt, das die Preisentwicklung graphisch veranschaulicht.

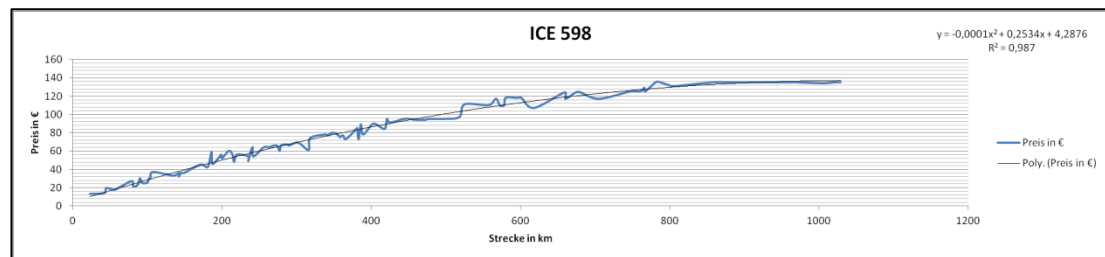


Diagramm 1: Preisentwicklung aller Teilstrecken.

3. Schritt „Trend des Graphen bestimmen“: In das Diagramm kann eine Trendlinie eingezeichnet werden. Wählt man den polynomischen Typ aus, passt er sich am besten dem Graphen an. Polynomische Trendlinien werden dann verwendet, wenn die vorliegenden Daten schwanken. Da dies bei den Ticketpreisen der Fall ist, eignet sich dieser Trendlinientyp. Die passende Formel zur Trendlinie ist $y = -0,0001x^2 + 0,2534x + 4,2876$ und wird von Excel im Diagramm angezeigt. Das mathematische Maximum kann mit Hilfe der Ableitung berechnet werden und liegt bei dieser (Trend-)Funktion bei einer Streckenlänge von 1267 km und einem Preis von 167,10€. D.h., würde die Trendlinie über den zu betrachtenden Bereich von 1029km hinauslaufen, würde der Preis mathematisch gesehen ab einer Streckenlänge von 1267 km fallen. Realistisch gesehen kann das natürlich nicht stimmen. Denn das würde bedeuten, dass ab diesem Punkt längere Strecken billiger werden würden. Eine Strecke von 2500km würde demzufolge nur noch 12,79€ kosten. Es ist aber nicht der Fall, dass die Preisentwicklung eine Parabel darstellt und somit gibt es rechtsseitig des Maximums auch keine Nullstelle für den x-Wert (die Streckenlänge). Vielmehr handelt es sich um eine stagnierende Funktion, die ab dem Maximum parallel zur x-Achse verläuft. Daher muss das Diagramm eher intuitiv als mathematisch gelesen werden. Dadurch wird klar, dass das Maximum bei etwa 136€ liegen muss. Das ist der Wert, der durch Ablesen ermittelt wird und optisch das Maximum der Trendlinie darstellt. Das Bestimmtheitsmaß beträgt $R^2 = 0,987$ und wird ebenfalls von Excel angezeigt. Das Bestimmtheitsmaß sagt etwas über die Zuverlässigkeit des Trends aus. Je näher der Wert an 1 liegt, desto größer ist die Verlässlichkeit der Trendlinie. Der Wert von $R^2 = 0,987$ ist damit schon sehr nah an 1 und die gewählte Trendlinie scheint sehr gut geeignet zu sein, um die Daten zu

beschreiben.⁵ An dieser Stelle wird erstmals deutlich, dass die Preisentwicklung nicht linear verlaufen kann. Denn wäre das der Fall, würde die Trendlinie nicht eine Art Bogen beschreiben, sondern gradlinig verlaufen. Lässt man Excel die lineare Trendlinie bestimmen, beträgt das Bestimmtheitsmaß auch nur noch $R^2=0,9408$. Dieser Betrag liegt weit ferner von der 1 als der Betrag der polynomischen Trendlinie. Dies zeigt also, dass die polynomische Trendlinie die besser geeignete ist und die Preisentwicklung nicht linear verläuft.

4. Schritt „Diagramm interpretieren“: Einzelne Ausreißer in dem Diagramm zeigen, dass manche Teilstrecken im Vergleich teurer als andere Streckenabschnitte sind. Das kann daran liegen, dass beliebte Strecken einer anderen Preiskategorie unterliegen als die anderen Strecken. Will man in Frankfurt beispielsweise zum Flughafen fahren, ist das Ticket gleich viel teurer als eine Einzelfahrt innerhalb von Frankfurt, nur weil der Flughafen Ziel vieler Fahrer ist und es keine andere Möglichkeit gibt, als das teurere Ticket zu kaufen. So ist es auch bei der ausgewählten ICE Strecke. Die Strecke von München nach Ulm beträgt 149 km und kostet 36€. Die Strecke von Stuttgart nach Mannheim ist nur 107 km lang, kostet aber dennoch einen Euro mehr, nämlich 37€. Solche paradoxen Vergleiche gibt es viele. Schaut man sich aber nicht einzelne Strecken, sondern den kompletten Verlauf des Graphen an, kann etwas Wichtiges festgestellt werden. Denn obwohl der Preis stetig zu steigen scheint, gilt nicht immer: je weiter, desto teurer. Ab einer gewissen Streckenlänge werden die Preise nicht höher. In unserem Beispiel ist der maximale Preis 135€ und gilt für Strecken von 781km (Stuttgart – Berlin Hbf) bis zu 1029km (München Hbf – Berlin Ostbahnhof). Und der Kurs der Trendlinie zeigt, dass der Trend zum Ende hin abzuflachen scheint. Der Preis steigt nicht bis ins Unendliche. Ab ca. 136€ scheint er nicht weiter zu steigen und stagniert.

5. Schritt „Mathematisches Ergebnis deuten“: Die Steigung des Graphen ist nicht konstant und wird zum Ende hin immer flacher. Das ist der entscheidende Punkt der Aufgabe: anfangs steigt der Preis noch, aber nach und nach flacht der Graph ab, bis er ab einer gewissen Streckenlänge stagniert. Genau das sollten die SuS auf ihre eigene Art und Weise herausfinden. Sie sollten feststellen, dass sich die Preise nicht linear entwickeln. Das ist allein schon daran erkennbar, dass die etwa doppelt so lange Strecke von München nach Berlin für 135€ nicht dem doppelten Preis von

⁵ Informationen zur Verwendung der Trendlinie sind unter www.microsoft.com zu finden.

118€ für die Strecke von Frankfurt nach Berlin entspricht. Das wurde im Video bereits verraten. Von diesem Punkt aus sollten die SuS selber weiterdenken und versuchen herauszufinden, wie sich die Preise entwickeln.

6. Schritt „Die Aufgabe schülerfreundlich gestalten“: Fakt ist, dass die Preisentwicklung nicht linear verläuft und nach Erreichen des Maximums ab einer gewissen Streckenlänge gewissermaßen stagniert. Nun wird mit diesem Ergebnis der Musterlösung eine schülerfreundliche Aufgabenstellung mit einer reduzierten Tabelle konstruiert. Denn die SuS erhalten natürlich nicht alle Teilstrecken und dessen Preise. Sie bekommen (neben dem Flyer und der Deutschlandkarte) die folgende Tabelle, die nur ausgewählte Strecken beinhaltet. Es handelt sich dabei um Strecken, die einen möglichst „knickfreien“ Graphen beschreiben. Die SuS können ihrer Tabelle damit die Ticketpreise entnehmen. Die Streckenlängen sind auf dem Arbeitsblatt der SuS nicht vorhanden, da sie diese mit Hilfe des Flyers bestimmen sollen.

Tabelle 3: Ausgewählte Strecken für SuS.

Stand vom 28.08.2012			
ICE 598 München Hbf - Stuttgart Hbf - Frankfurt (Main) Hbf - Berlin Ostbahnhof			
Von	Nach	Strecke in km	Preis in €
Frankfurt (Main) Hbf	Hanau Hbf	23	13,00
Hildesheim Hbf	Braunschweig Hbf	42	14,00
Kassel-Wilhelmshöhe	Göttingen	45	19,50
München-Pasing	Augsburg Hbf	55	17,50
Mannheim Hbf	Frankfurt (Main) Hbf	79	27,00
Hanau Hbf	Fulda	81	21,00
Augsburg Hbf	Ulm Hbf	87	23,00
Fulda	Kassel-Wilhelmshöhe	90	30,00
Ulm Hbf	Stuttgart Hbf	93	25,00
Göttingen	Hildesheim Hbf	100	25,50
Stuttgart Hbf	Mannheim Hbf	107	37,00
Braunschweig Hbf	Berlin-Spandau	199	56,00
Frankfurt (Main) Hbf	Göttingen	239	61,00
Ulm Hbf	Frankfurt (Main) Hbf	279	66,00
Mannheim Hbf	Göttingen	318	74,00
Frankfurt (Main) Hbf	Braunschweig Hbf	381	85,00
Kassel-Wilhelmshöhe	Berlin Ostbahnhof	407	89,00
München Hbf	Hanau Hbf	451	95,00
Hanau Hbf	Berlin-Spandau	557	110,00
Frankfurt (Main) Hbf	Berlin Ostbahnhof	601	118,00
Mannheim Hbf	Berlin Ostbahnhof	680	124,00
Augsburg Hbf	Braunschweig Hbf	747	125,00
München Hbf	Braunschweig Hbf	809	131,00
Ulm Hbf	Berlin Ostbahnhof	880	135,00
Augsburg Hbf	Berlin Ostbahnhof	967	135,00
München Hbf	Berlin Ostbahnhof	1029	135,00

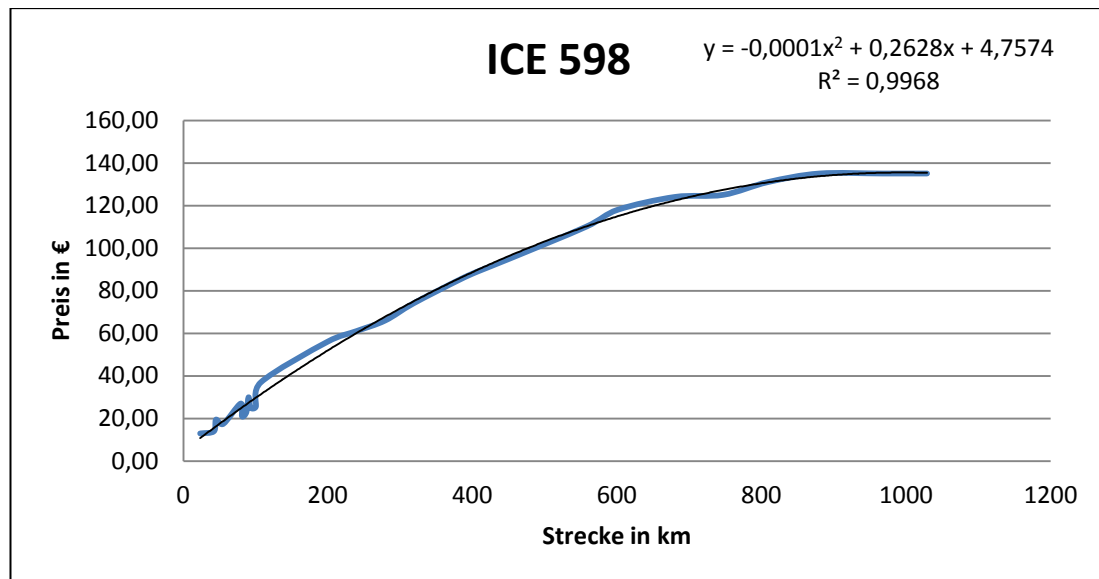


Diagramm 2: Preisentwicklung ausgewählter Strecken.

Auch bei diesem Diagramm zeigt Excel die Formel der polynomischen Trendlinie und das Bestimmtheitsmaß an. Die Formel hat sich ein klein wenig verändert und lautet nun $y = -0,0001x^2 + 0,2628x + 4,7574$. Das mathematische Maximum dieser Trendlinie liegt dadurch bei 1314km und 177,42€. Auch hier gilt, dass der abgelesene Wert intuitiv besser passt. Dieser beträgt hier ebenfalls ca.136€. Das Bestimmtheitsmaß mit einem Betrag von $R^2 = 0,9968$ ist sogar noch näher an der 1 als bei dem vorherigen Diagramm, was die Zuverlässigkeit der Trendlinie weiter verstärkt. Sie passt sich optimal den Daten an und beschreibt eine gleichmäßige Preisentwicklung. Auch die Tabelle sagt einiges über die Ticketpreise aus. Vor allem durch die letzten drei Wertepaare der Tabelle sollte den SuS deutlich werden, dass unterschiedliche Strecken denselben Preis haben können, obwohl ihre Längen nicht ganz übereinstimmen. Eine Strecke von 880 km kann genauso viel kosten wie eine Strecke der Länge 1029km. Das erweckt den Anschein, dass noch längere Strecken voraussichtlich nicht enorm teurer werden. Die Trendlinie bestätigt diese Vermutung, da sie ab etwa 136€ nicht weiter zu steigen scheint, obwohl die Streckenlänge weiter zunimmt. Mit Hilfe der gegebenen Tabelle dürfte es den SuS gelingen, diese Erkenntnis zu gewinnen, unabhängig davon, ob sie sich für die Erstellung eines Diagrammes oder für einen anderen Lösungsansatz entscheiden. Der Preisunterschied von 17€ kann mit Hilfe der Trendlinie anschaulich erklärt werden. Wird die Steigung bzw. der abflachende Graph betrachtet, so ergibt sich daraus, dass der Preis immer schwächer ansteigt. Zu Beginn ist die Steigung noch recht steil und

damit wird der Preis mit jedem weiteren Kilometer auch recht schnell teurer. Zum Ende hin flacht der Graph allerdings ab, wodurch die Steigung immer geringer wird und der Preis sich dadurch auch immer langsamer erhöht. Das erklärt, dass Annas Ticket vergleichsweise teuer ist. Denn bei ihrer Streckenlänge steigt der Preis noch stark an. Je näher sie sich Maries Streckenlänge nähert, desto geringer wird die Steigung und damit wird Maries Ticket auch nicht enorm teuer. Die immer kleiner werdende Steigung ist damit für die immer kleiner werdende Preisdifferenz verantwortlich. Die SuS sollen durch diese Aufgabe eine gewisse Einsicht in das Tarifsystem der Deutschen Bahn erhalten und erkennen, wie ihre Ticketpreise entstehen.

3.4 Kriterien einer Modellierungsaufgabe

Doch was macht diese Aufgabe eigentlich zu einer Modellierungsaufgabe? Erfüllt sie die nötigen Kriterien dazu? Um diese Frage zu beantworten, müssen zunächst Merkmale einer Modellierungsaufgabe erfasst werden.

MAAß führt folgende Kriterien auf: Modellierungsaufgaben sind offen, komplex, realistisch, authentisch, problemhaltig und lösbar durch Ausführen eines Modellierungsprozesses (vgl. MAAß 2007, S.12). GREEFRATH nennt außerdem die Anregung, Relevanz und den Realitätsbezug beim Modellieren (vgl. GREEFRATH 2006, S.31f.).

Das Kriterium der Offenheit wird von der Aufgabe erfüllt. Sie bietet verschiedene Lösungsalternativen und somit unterschiedliche Lösungsstrategien (vgl. HINRICHS 2008, S. 79). Neben der vorgestellten Musterlösung kann beispielsweise auch mit Proportionalität begründet werden, indem gesagt wird, dass Streckenlänge und Preis nicht durchgehend proportional sind und deshalb nach einer anderen Erklärung gesucht wird. Je nach Vorwissen kann es sehr unterschiedliche Erklärungsansätze geben. Bei offenen Aufgaben ist es deshalb wichtig, alle Lösungsansätze zuzulassen, egal ob sie sehr einfach gehalten oder kompliziert gestaltet sind. Komplex ist die Aufgabe allemal. Ein oder zwei Rechnungen reichen nicht aus, um eine Antwort zu erhalten. Das Problem muss zunächst verstanden (was auf Anhieb nicht ganz einfach ist), dann gelöst (was auf sehr komplexe Weise durchgeführt werden kann) und schließlich beschrieben werden. Der komplette Modellierungskreislauf muss

durchlaufen werden, um die Aufgabe zu lösen. Weiterhin weist die Aufgabe einen Realitätsbezug auf. Es handelt sich nicht um eine erfundene Sachlage. Die Fakten sind, so wie sie geschildert werden, in der Realität wiederzufinden. Nur der Hintergrund mit den drei Freundinnen wurde hinzugefügt, um die Aufgabe schülernah zu gestalten. Dadurch ist auch die Authentizität gewährleistet. Die SuS bearbeiten Dinge, die es in der Realität tatsächlich gibt und die eine gewisse Echtheit innehaben (vgl. GREEFRATH 2006, S.30). Unter einer authentischen Situation wird eine außermathematische Situation verstanden, „die in ein bestimmtes Gebiet eingebettet ist und sich mit Phänomenen und Fragen beschäftigt, die für dieses Gebiet bedeutsam sind“ (MAAB 2005, S.116). Bei der vorliegenden Aufgabe wird die außermathematische Situation der Deutschen Bahn beschrieben, die sich mit der Frage nach den Ticketpreisen beschäftigt. Durch den Bezug auf die Ticketpreise ist die Frage auch nach der Bearbeitung der Aufgabe noch von Relevanz. Die Rechnung kann danach immer wieder in den Blick genommen werden. Ein Rückbezug auf die Realität ist daher bei authentischen Aufgaben jederzeit möglich. (Vgl. HINRICHS 2008, S.78) Dass die Aufgabe problemhaltig ist, versteht sich von selbst. Das Problem wurde bereits in der Aufgabenstellung geschildert. Es besteht darin, gewissermaßen die Preispolitik der Deutschen Bahn mit mathematischen Hilfsmitteln herauszuarbeiten. Angeregt werden die SuS durch den lokalen Bezug der Haltestation Frankfurt. Dass das Problem für die SuS tatsächlich relevant ist, merken sie vielleicht noch nicht sofort, da sie zu wenig Erfahrung mit der Deutschen Bahn haben. Allerdings können sie das Problem auf das RMV Gebiet übertragen, indem sie z.B. erkennen, dass Tagestickets sich ab der dritten Fahrt innerhalb von Frankfurt schon lohnen. Auch hinter dieser Tatsache steckt Mathematik, was sie durch die Bahn-Aufgabe erkennen können. Der Realitätsbezug beim Modellieren und bei der vorliegenden Aufgabe wurde nun bereits mehrmals erwähnt. Er stellt gewissermaßen das Hauptkriterium dar und ist unerlässlich. Denn „das Ziel und die Aufgabe des Mathematikunterrichts bestehen darin, Schülerinnen und Schülern die Befähigung zur Bewältigung ihres alltäglichen Lebens zu vermitteln“ (GREEFRATH 2006, S.32), d.h. ihnen soll ermöglicht werden, auch Probleme aus der Realität lösen zu können.

Damit wurden alle Kriterien erfüllt und bei der Bahn-Aufgabe handelt es sich zweifelsohne um eine Modellierungsaufgabe.

4. Empirie

Viele interessante Fragen liegen dieser Studie zu Grunde. Auf wie viele Weisen wurde die Aufgabe gelöst und welche kommt am häufigsten vor? Welche Level wurden erreicht? Kann ein Punkt ausgemacht werden, mit dem bestimmt werden kann, an welcher Stelle die SuS die meisten Schwierigkeiten haben? Wo sind kognitive Hürden zu finden? Wie ist das Gesamtbild der Aufgabe, haben die SuS sie lösen können oder waren sie überfordert? Hatten sie einen Bezug zu der Aufgabe bzw. zu dem Aufgabentypen? Kann eine allgemeine Aussage über die Integration von Modellierungsaufgaben in den Schulalltag gemacht werden? All diese Fragen sollen nun geklärt werden.

An dieser Stelle wird zunächst das Vorgehen des empirischen Teils der Studie begründet. Für die Auswertung der Schülerergebnisse werden erst einmal alle Lösungsansätze herausgearbeitet. Anhand dessen soll gesehen werden, wie die SuS an die Aufgabe herangegangen sind und durch welchen Ansatz sie den Bezug zu der Aufgabe finden. Damit wird konkret auf den Schülerlösungsraum dieser Aufgabe eingegangen. Anschließend wird mit Hilfe von Leveln untersucht, wie gut die SuS die Aufgabe gelöst haben. D.h. aber nicht, dass sie eine gute Note auf ihre Lösung bekommen würden. Mit gut ist eher gemeint, ob sie viele Schritte des Modellierungskreislaufs beschreiten können. Es wird also gewissermaßen untersucht, wie weit die SuS ihre Aufgabe entlang des Kreislaufes gelöst haben. Dementsprechend werden die Level auch, an den Teilschritten orientiert, voneinander abgetrennt. Mit Hilfe der Level kann dann ausgemacht werden, wo bei SuS Schwierigkeiten aufgetreten sind. Dementsprechend bildet dies den Schwerpunkt der Empirie. Denn die Lösungsansätze der SuS können nur vorgestellt, beschrieben und dazu vermutet werden, wieso sie gewählt wurden. Interessanter ist es, zu sehen, wie die SuS tatsächlich mit der Aufgabe gearbeitet haben, d.h. welche Schritte sie gemacht haben und ob diese dem Modellierungskreislauf entsprechen. Nachdem die Lösungsansätze und Level betrachtet wurden, wird nun herausgearbeitet, wo kognitive Hürden liegen. Ob es zwischen den erhobenen Merkmalen signifikante Unterschiede gibt, soll mit Hilfe eines Signifikanz-Testes untersucht werden.

Bevor es zur Auswertung, Analyse und Interpretation der Schülerergebnisse kommt, müssen die Erhebungs- und Auswertungsmethoden erklärt werden. Es wurden keine persönlichen Daten erhoben. Die Aufgabe wurde anonym durchgeführt. Nur die

Klasse, das Alter und Geschlecht wurden angegeben. Interviews, Fragebögen, Videoaufzeichnungen oder ähnliches wurden nicht erstellt. Zur Auswertung werden nur die Lösungsblätter der SuS herangezogen sowie an einigen Stellen Beobachtungen, die während der Arbeitszeit notiert wurden. Diese dienen aber nur als Ergänzung und stellen kein eigenes Auswertungskriterium dar.

Die Auswertung der Ergebnisse erfolgt zum einen durch die Differenzierung der Lösungswege und zum anderen durch das Einteilen der Schülerergebnisse in Level. Durch die Differenzierung der Schülerlösungen sollen alle vorkommenden verschiedenen Lösungsmöglichkeiten aufgezeigt werden. Die Einteilung in Level ermöglicht die Bewertung der Aufgaben⁶. Dadurch kann herausgefunden werden, wie gut die SuS mit der Aufgabe klarkommen bzw. wo Schwierigkeiten liegen.

4.1 Lösungsansätze

Die Differenzierung der Lösungswege und die Einteilung der Schülerergebnisse in Level bilden den zentralen Teil dieser Arbeit. Begonnen wird mit der Auswertung der Lösungswege. Zudem werden die verschiedenen Wege einzeln vorgestellt. Dann wird zu jedem Lösungsweg ein Schülerbeispiel aufgeführt, welches ausgewertet und analysiert wird.

134 SuS haben sich mit dem Preisgenerator der Deutschen Bahn auseinandergesetzt. Dabei sind viele verschiedene Herangehensweisen festzustellen. Jeder Schüler kann den Lösungsweg wählen, der seinem Niveau entspricht.

„So nehmen leistungsstarke Lernende eher aufwendige, mathematisch anspruchsvolle Modellierungen vor, die sie fordern, während leistungsschwächere Lernende einfachere Wege wählen, auf denen sie ebenfalls zu Lösungen der Aufgabe gelangen können.“ (MAAB 2004, S.159)

Da die SuS meist unterschiedliche Leistungsstärken aufweisen, ergeben sich daraus auch unterschiedliche Lösungswege. Insgesamt wurde die Aufgabe auf zehn verschiedene Möglichkeiten bearbeitet. Mal wurde die Aufgabe rein mathematisch betrachtet und mal spielt die Realität die entscheidende Rolle. Die einen SuS gehen davon aus, dass das Ticket für 135€ realistisch ist und berechnen die Aufgabe von dort aus, andere wählen das Ticket über 118€ als Wert, von dem ausgegangen wird. All das führt zu vielen verschiedenen Ansätzen. Zusätzlich kann eine Kategorie mit unbrauchbaren Ansätzen erstellt werden.

⁶ Anmerkungen bezüglich der Bewertung folgen im Abschnitt „Einteilung der Schülerergebnisse in Level“.

Im Folgenden werden zunächst die verschiedenen Lösungsansätze beschrieben. Diese werden durch exemplarische Schülerlösungen ergänzt. Anschließend findet eine Auswertung statt, bei der die Verteilung der gewählten Lösungswege und die Kriterien Alter, Klassenstufe und Geschlecht berücksichtigt werden.

4.1.1 Beschreibung der Lösungsansätze

Alle elf vorkommenden Lösungswege werden nun einzeln vorgestellt. Der Beschreibung wird jeweils eine exemplarische Schülerlösung beigelegt.

Lösungsweg 1: „Streckenlänge“, $n=32$

Bei diesem rein mathematischen Lösungsweg arbeiten die SuS mit der Streckenlänge. Sie berechnen dabei die Entfernungen bestimmter Städte, wie z.B. München-Frankfurt oder Frankfurt-Berlin. Weiter sind die meisten SuS nicht gekommen, da sie dadurch nur das feststellen konnten, was bereits in dem Video gesagt wurde. Nämlich, dass eine fast doppelt so lange Strecke (München-Berlin) nicht dem doppelten Preis entspricht (135€ im Vergleich zu 188€). Die Aufgabe wurde somit zwar verstanden, konnte aber bezüglich der Fragestellung, wie diese Preise entstehen, meistens nicht beantwortet werden. Die Berechnung der Streckenlängen lösen die SuS über Addition. Dadurch müssen sie viel Zeit einbüßen. Denn nur die wenigsten haben einen Taschenrechner benutzt, da sie ihn nicht dabei hatten, wodurch sie viel Zeit in die schriftliche Addition investieren mussten. Infolgedessen sind die meisten nicht mehr dazu gekommen, die berechneten Längen mit den jeweiligen Preisen zu vergleichen. Die Aussage, die am häufigsten getroffen wurde, lautet deshalb: Je länger der Weg, desto teurer das Ticket. Doch dass diese Antwort nicht stimmen kann, sollte allein aufgrund der Fragestellung klar sein. Denn daraus ergibt sich ja schon die Schlussfolgerung, dass das Ticket nicht immer viel teurer sein muss, obwohl die Strecke um einiges länger ist, wie es auch in dem konkreten Beispiel der Strecken München-Berlin und Frankfurt-Berlin beschrieben ist. Den SuS fehlt also noch der Bezug von der Streckenlänge zum Preis. Und wenn doch an einer Stelle der Preis erwähnt wird, dann sind das die vorgegebenen 135€ bzw. 118€. Eine eigene Hypothese zur Berechnung dieser Preise wird bei diesem Lösungsansatz nicht gegeben.

Marie 135€ München → Berlin (Doppel so viel)
 Anna 118€ Frankfurt → Berlin

München Hbf → Frankfurt am Main
 $7\text{km} + 55\text{km} + 87\text{km} + 93\text{km} + 107\text{km} + 79\text{km} = \underline{\underline{428\text{km}}}$

Frankfurt Hbf → Berlin Ostbahnhof
 $23\text{km} + 81\text{km} + 90\text{km} + 45\text{km} + 100\text{km} + 42\text{km} + 199\text{km} = \underline{\underline{580\text{km}}}$

München bis Frankfurt bis Berlin = 1008 km

Marie insgesamt Fahrt ⇒ von München bis Berlin ⇒ 1008 km
 Anna insgesamt Fahrt ⇒ von Frankfurt bis Berlin ⇒ 580 km

Abb. 2: Schülerlösung zu Lösungsweg 1.

Diese Schülerin hat zunächst die wichtigsten Informationen der Fragestellung in Kurzform notiert. Dann hat sie die Teilstrecke von München nach Frankfurt und von Frankfurt nach Berlin berechnet. Die Summe dieser beiden Strecken ergibt die Gesamtstrecke. Damit kann sie dem gegebenen Preis von 135€ die entsprechende Streckenlänge von 1008km (bei der Streckenberechnung ist ihr ein Rechenfehler unterlaufen) zuordnen. Als nächsten Schritt hätte sie weitere Ticketpreise der Tabelle, die sie als Hilfestellung bekommen hat, entnehmen und daraus Strecke/Preis-Paare aufstellen können. Da sie dies nicht getan hat, kann sie, wie auch die meisten anderen SuS dieses Lösungsweges, keine Verbindung zwischen Preis und Strecke herstellen und die Frage nicht beantworten. Sie scheitert bei dem Schritt, weitere Paare zu sammeln und zwischen ihnen eine Beziehung herzustellen, die die Preisentwicklung begründet.

Lösungsweg 2: „Luftlinie“, $n=7$

Einige SuS haben einen ähnlichen Gedankengang, wie er bei Lösungsweg 1 vorzufinden ist. Doch statt mit den Streckenlängen der Bahngleise zu rechnen,

argumentieren sie über die Luftlinie. Einige SuS beschreiben, dass die Luftlinie von München nach Berlin wahrscheinlich der Bahnstrecke von Frankfurt nach Berlin entspricht. Dadurch ergeben sich auch die nah beieinanderliegenden Preise. Wahrscheinlich haben sich die SuS nicht vorstellen können, wie weit München und Berlin tatsächlich voneinander entfernt sind. Denn während der Bearbeitung haben viele SuS nicht geglaubt, dass zwischen München und Berlin über 1000km liegen. Daher haben sie wohl geschätzt, dass die Bahnstrecke von Frankfurt nach Berlin der Luftlinie von München nach Berlin entspricht. Daraus würde sich ergeben, dass die Preise für diese annähernd gleich langen Strecken auch ähnlich seien müssten. Durch diese Tatsache wird gerechtfertigt, dass der Preisunterschied nur 17€ beträgt. Die komplette Bahnstrecke von München nach Berlin von 1029km spielt bei diesem Ansatz keine tragende Rolle. Es wird hauptsächlich über die Bahnstrecke von Frankfurt nach Berlin und die Luftlinie von München nach Berlin argumentiert.

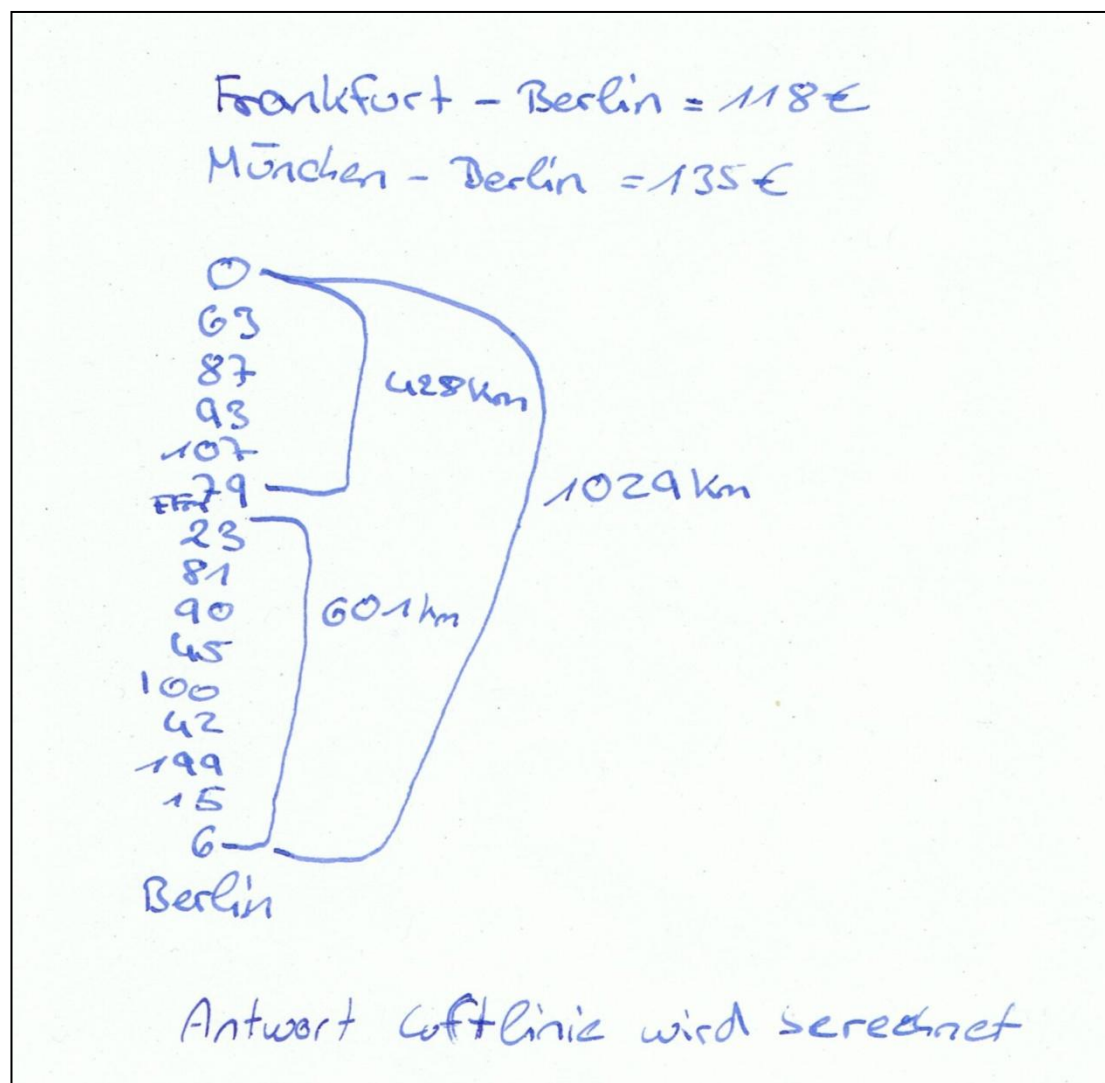


Abb. 3: Schülerlösung zu Lösungsweg 2.

Diese Schülerin hat ähnlich wie bei Lösungsweg 1 zunächst zwei Teilstrecken berechnet. Allerdings hat sie dann weitergedacht und die Luftlinie erwähnt. Ihre Gedanken dazu lassen sich nur erahnen, da weitere Ausführungen fehlen. Dass sie die Luftlinie als senkrecht beschreibt, lässt vermuten, dass sie damit die Direktverbindung von München nach Berlin meint. Würde man diese in die Deutschlandkarte zeichnen, entstünde eine mehr oder weniger senkrechte Linie, welche die Luftlinie von München nach Berlin beschreibt. Der Schülerin ist wohl klar, dass diese Strecke kürzer sein muss als die Bahnstrecke, da sie nicht gradlinig ist. Ihre Idee ist also vermutlich, dass die senkrechte Luftlinie nur ein kleines Stück länger ist als die Bahnlinie von Frankfurt nach Berlin und das Bahnticket deshalb auch nur ein wenig teurer ist. Aber wie bereits erwähnt, sind das nur Vermutungen und Interpretationen, da die Schülerin ihre Idee nicht weiter ausführt.

Lösungsweg 3: „Preis“, $n=6$

Dieser Lösungsweg ist der Komplementär zum ersten Weg. Die SuS argumentieren ausschließlich über den Ticketpreis und lassen die Streckenlänge außen vor. Dazu addieren sie die Preise für die einzelnen Teilstrecken und erhalten eine Summe, die ihrer Meinung nach dem Gesamtpreis für die Strecke von München nach Berlin entsprechen sollte. Das Ergebnis eines Schülers ist beispielsweise 308,50€. D.h. die Summe der Teilstreckenpreise ist wesentlich größer als der Preis von 135€ für die vorgegebene Gesamtstrecke. Welche Konsequenz sich daraus ergibt, erläutert aber kein Schüler. Die SuS lösen die Aufgabe rein mathematisch. Sie stellen keinen Bezug zur Streckenlänge her.

Handwritten student solution for 'Preis' (n=6):

- München Hbf → Augsburg = 17,50€ +
- Augsburg Hbf → Ulm = 23,00€ +
- Ulm Hbf → Stuttgart Hbf = 25€ +
- Stuttgart Hbf → Mannheim Hbf = 37€ +
- Mannheim Hbf → Frankfurt Hbf = 27€ +
- Frankfurt → Hanau = 13€ +
- Hanau → Fulda = 21€ +
- Fulda → Kassel = 30€ +

Brackets indicate sub-totals:

- A bracket groups the first two items (München Augsburg and Augsburg Ulm) with a total of 40,50€.
- A bracket groups the next three items (Ulm Stuttgart, Stuttgart Mannheim, Mannheim Frankfurt) with a total of 62€.
- A bracket groups the last three items (Frankfurt Hanau, Hanau Fulda, Fulda Kassel) with a total of 91€.

Abb. 4: Schülerlösung zu Lösungsweg 3 (Vorderseite).

Kassel \rightarrow Göttingen = 19,50€ +
 Göttingen \rightarrow Hildesheim = 25,50€ + } 45€
 Hildesheim Hbf \rightarrow Braunschweig = 14€ + } 70€
 Braunschweig \rightarrow Berlin = 56€

=
 40,50€
 + 62,00€
 + 91,00€
 + 45,00€
 + 70,00€

 308,50€

Abb. 5: Schülerlösung zu Lösungsweg 3 (Rückseite).

Bei dieser Lösung hat die Schülerin alle Teilstrecken von München nach Berlin untereinander notiert und die entsprechenden Preise ergänzt. Diese hat sie schrittweise addiert und einen Gesamtpreis erhalten. Demnach müsste die Summe aller Teilstreckenpreise 308,50€ sein. Es folgen keine weiteren Ausführungen, die erkennen lassen, welche Erkenntnis die Schülerin dadurch gewinnt. Der Gedankengang, der dahinter steckt, ist aber gut. Denn die Frage lautet, wie der Preis von 135€ entstehen kann. Und das versucht sie nachzuvollziehen, indem sie explizit mit dem Preis arbeitet. Den Preisgenerator erklärt sie damit allerdings nicht.

Lösungsweg 4: „Preis und Strecke“, $n=21$

Bei diesem Lösungsweg werden sowohl der Preis für das Ticket als auch die Länge der Strecke verglichen. Es wird versucht, eine Beziehung zwischen diesen beiden Komponenten herzustellen. Doch dies ist gar nicht so einfach, da keine Linearität vorherrscht und das muss erst mal erkannt werden. Dieser Ansatz bleibt ergebnislos und grenzt sich dadurch zu Lösungsweg 5 ab, bei dem die Preis-Strecke-Beziehung mathematisch dargestellt wird und dadurch ein Ergebnis entsteht. Bei diesem Ansatz werden zwar Wertepaare aus der Streckenlänge und dem jeweiligen Preis erstellt, mit ihnen wird aber nicht weiter gearbeitet. Sie werden häufig nicht übersichtlich in

Tabellen aufgelistet oder im Graphen dargestellt, wie es im nächsten Lösungsweg der Fall ist.

Marie :			
München	-> Augsburg	17,50 €	= 62 km
Augsburg	-> Ulm	23,00 €	= 87 km
Ulm	-> Stuttgart	25,00 €	= 93 km
Stuttgart	-> Mannheim	37,00 €	= 107 km
Mannheim	-> Hannau Frankfurt	98,00 €	= 79 km
		27	
Frankfurt	-> Hanau	13,00 €	= 23 km
Hanau	-> Fulda	21,00 €	= 81 km
Fulda	-> Kassel	30,00 €	= 90 km
Kassel	-> Göttingen	19,50 €	= 45 km
Göttingen	-> Hildesheim	25,50 €	= 100 km
Hildesheim	-> Braunschweig	14,00 €	= 42 km
Braunschweig	-> Berlin	56,00 €	= 199 km
		<u>309,50 €</u>	<u>= 21 km</u>
			929 km

Abb. 6: Schülerlösung zu Lösungsweg 4.

Bei dieser Lösung wurden Lösungsweg 1 und Lösungsweg 3 kombiniert. Der Schüler hat die Strecken geordnet aufgelistet und tabellarisch die Preise und Streckenlängen dazu notiert. Er kommt zu dem Ergebnis, dass die Gesamtstrecke 929km lang ist und 309,50€ kosten müsste. Was er damit erreichen will, ist unklar,

da er keine weitere Beschreibung macht. Es ist zu vermuten, dass er schauen wollte, wie sich die Gesamtstrecke tatsächlich zusammensetzt. Er kennt den vorgegebenen Preis von 135€ für die Gesamtstrecke und vermutet, dass er aus der Summe aller Teilstrecken besteht. Doch dies ist nicht der Fall, wie er an seiner Rechnung erkennen kann. An dieser Stelle gibt er auf und findet keine Erklärung dafür.

<p>Marie: 135 € = <u>1029 km</u></p> <p style="margin-left: 100px;">135 €</p> <p style="margin-left: 100px;">7</p> <p style="margin-left: 100px;">55</p> <p style="margin-left: 100px;">87</p> <p style="margin-left: 100px;">93 100</p> <p style="margin-left: 100px;">107</p> <p style="margin-left: 100px;">79</p> <p style="margin-left: 100px;">23</p> <p style="margin-left: 100px;">81</p> <p style="margin-left: 100px;">90</p> <p style="margin-left: 100px;">45</p> <p style="margin-left: 100px;">100</p> <p style="margin-left: 100px;">42</p> <p style="margin-left: 100px;">199</p> <p style="margin-left: 100px;">15</p> <p style="margin-left: 100px;">766</p> <p style="margin-left: 100px;">1029</p>	<p>Septu Anna: 118€ - <u>601 km</u></p> <p style="margin-left: 100px;">118€</p> <p style="margin-left: 100px;">23</p> <p style="margin-left: 100px;">81</p> <p style="margin-left: 100px;">90</p> <p style="margin-left: 100px;">45</p> <p style="margin-left: 100px;">100</p> <p style="margin-left: 100px;">42</p> <p style="margin-left: 100px;">199</p> <p style="margin-left: 100px;">15</p> <p style="margin-left: 100px;"><u>436</u></p> <p style="margin-left: 100px;">601</p> <p style="margin-left: 100px;">601</p>
----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Beispiel:

Augsburg Hbf - Ulm Hbf	<u>87 km</u> 23 €
Frankfurt (Main) Hbf - Hanau Hbf	<u>23 km</u> 13 €

Bei dem Beispiel ist zu sehen, dass wieder über ~~da~~ die doppelt so lange Strecke trotzdem nur 10€ mehr kostet.

Abb. 7: Weitere Schülerlösung zu Lösungsweg 4.

Diese Schülerin hat wohl eine ähnliche Idee. Sie wählt Teilstrecken aus und ordnet ihnen den Preis und die Länge zu. Damit erhält sie vier Wertepaare. Zwei davon bestehen aus den gegebenen Strecken der Aufgabenstellung (München-Berlin und Frankfurt-Berlin). Die anderen beiden (Augsburg-Ulm und Frankfurt-Hanau) hat sie

frei gewählt. Sie findet in ihnen ein weiteres Beispiel, das zeigt, dass eine weitaus längere Strecke (fast vier Mal so lang) vergleichsweise um einiges günstiger ist (nicht mal doppelt so teuer). Sie unterstützt damit die Aussage, dass nicht gilt: Je länger die Strecke ist, desto teurer ist das Ticket. Es muss eine andere Regelung gelten. Welche es ist, findet sie nicht heraus.

Lösungsweg 5: „Preis und Strecke in Beziehung“, n=18

Einige SuS haben es geschafft, eine Beziehung zwischen Ticketpreis und Streckenlänge herzustellen und diese auch zu veranschaulichen. Sie versuchen z.B. einen Graphen zu zeichnen oder Funktionen zu erstellen. Dieser Ansatz ist äußerst zielführend, dafür aber auch der anspruchsvollste und zeitaufwendigste. Er entspricht im Ansatz der beschriebenen Musterlösung. Als Steigerung zum Lösungsweg 4 werden die ermittelten Wertepaare miteinander verglichen und in Beziehung gesetzt, wodurch ein Zusammenhang zwischen Preis und Strecke ermittelt wird. Sie stoßen dabei sehr häufig auf die Linearität. Entweder gehen sie fälschlicherweise davon aus, dass sie vorhanden ist, oder sie stellen fest, dass dies nicht die Lösung der Aufgabe sein kann und suchen nach Alternativen dafür.

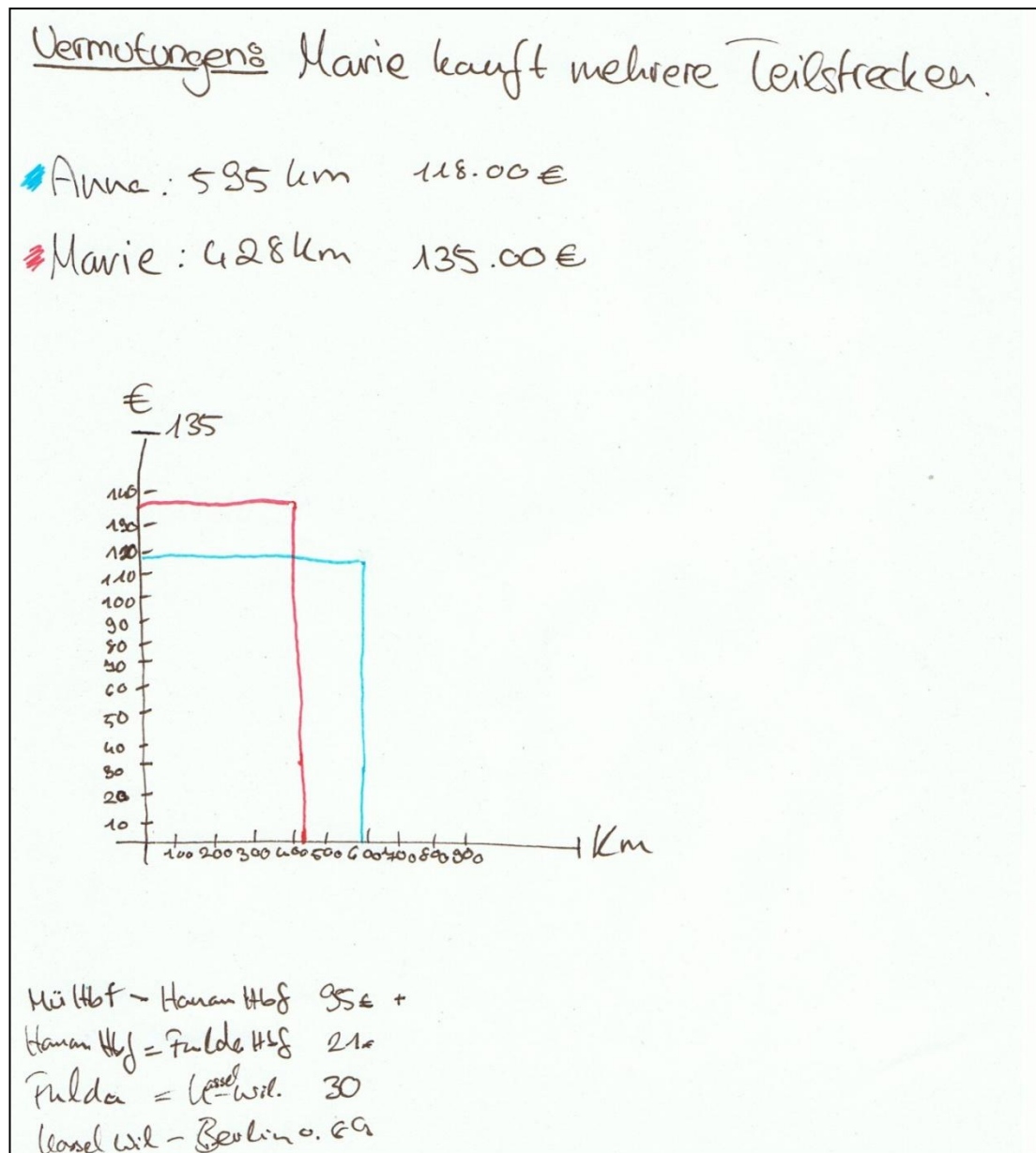


Abb. 8: Schülerlösung zu Lösungsweg 5.

Hier sieht man den Versuch einer Schülerin, Preis und Streckenlänge in ein Koordinatensystem zu übertragen. Sie hat dafür eine Achse dem Preis und eine Achse der Strecke zugeordnet. Indem sie die Distanzen ermittelt, kann sie diese mit ihren entsprechenden Preisen in das Koordinatensystem übertragen. Für die in dem Video genannten Strecken hat sie dies schon gemacht. Sie hat sich vier weitere Strecken mit dem Preis notiert, ihre Länge aber noch nicht berechnet. Hätte sie dies noch geschafft, hätte sie vier weitere Punkte in ihr Koordinatensystem einzeichnen können. Daran wäre schon eine erste Entwicklung der Preise zu sehen gewesen. Der Ansatz ist damit gut, wurde aber nicht so weit ausgeführt, dass die Schülerin zu einem schlüssigen Ergebnis kommt, das die Preisentwicklung erklärt.

München nach Berlin 135€ 1029 km 8h 5min = 480min
 Frankfurt nach Berlin 118€ 601 km 4h 20min = 260min

~~135 = 1029 · 480~~

$$135y = 118x \quad | : 135$$

$$y = 135 + 118x$$

$$135y = 118x \quad | : 118$$

$$135y + 118 = x$$

Abb. 9: Weitere Schülerlösung zu Lösungsweg 5.

Dieser Schüler versucht ebenfalls den Zusammenhang zwischen Preis und Strecke zu ermitteln. Er hat die Wertepaar der München-Berlin und der Frankfurt-Berlin Strecke erstellt und versucht, daraus Funktionen zu ermitteln. Dies gelingt ihm aber nicht. Er denkt sich wohl, wenn er sowohl 135€ also auch 118€ mit verschiedenen Faktoren multipliziert, ergebe sich daraus eine Gleichung, die das Verhältnis dieser beiden Preise beschreibt. Die Streckenlänge lässt er dabei völlig außer Acht. Nach x bzw. y aufgelöst, ergeben sich zwei Gleichungen für den Schüler. Im nächsten Schritt hätte er die nach y aufgelöste Funktion zeichnen können. Spätestens dann hätte er erkannt, dass seine aufgestellte Gleichung einen Fehler enthalten muss, da sie erst bei dem y -Achsenabschnitt 135 beginnen und sehr steil ($m=118$) sein würde. Er würde schnell feststellen, dass das nicht die Preisentwicklung darstellen kann. Seine Idee, eine Funktion zu ermitteln, ist dennoch gut, denn er versucht damit eine Preisentwicklung zu ermitteln. Würde seine Idee richtig ausgeführt werden und es entstünde eine korrekte Funktion, könnte er für eine Variable jede beliebige Streckenlänge wählen und würde damit den Preis für das Ticket berechnen können.

Lösungsweg 6: „€ pro km“, $n=5$

Dieser Lösungsweg ähnelt sehr dem Vierten. Es wird versucht, Preis und Strecke zu verbinden. Dafür wird der Preis pro Kilometer berechnet. Je nachdem, welche Strecke mit entsprechendem Preis zur Berechnung gewählt wird, entsteht natürlich ein anderer Kilometerpreis. Diese Werte gilt es dann zu vergleichen. Durch den Vergleich wird deutlich, ob bestimmte Teilstrecken eventuell teurer sind als andere.

München Hbf - Hanau = 95,-
 Hanau - Borein = 110

87 km = 23,-
 55 km = 17,50
~~20 km = 10,-~~
 93 km = 25,-

Augsburg - Ulm
 München - Augsburg
 Ulm - Stuttgart

:55 ↓
 $55 \text{ km} = 17,50 \quad \downarrow :55$
 1 = 0,31 ct

:87 ↓
 $87 \text{ km} = 23 \quad \downarrow :87$
 = 0,26 ct

:93 ↓
 $93 = 25 \quad \downarrow :93$ 0,26 ct

Abb. 10: Schülerlösung zu Lösungsweg 6.

Die Schülerin hat sich drei Teilstrecken ausgesucht, zu denen sie den Preis pro Kilometer berechnet (Augsburg-Ulm, München-Augsburg, Ulm-Stuttgart). Sie hat ihre Rechnung sehr übersichtlich dargestellt. Als Ergebnis erhält sie drei Kilometerpreise, von denen zwei in etwa übereinstimmen und ein Preis etwas höher

ist als die anderen beiden. Allerdings hat die Schülerin falsch gerundet. Das Ergebnis für München-Augsburg ist 32ct/km und für Ulm-Stuttgart 27ct/km. Mit dem Ergebnis erkennt die Schülerin, welche Teilstrecken vergleichsweise teurer sind als andere. Anhand dessen könnte sie im nächsten Schritt nach Erklärungen suchen, warum bestimmte Strecken mehr kosten und wodurch der Preisunterschied entsteht.

Lösungsweg 7: „Angebote“, n=10

Bei diesem Lösungsansatz argumentieren die SuS außermathematisch. Sie finden die Lösung für das Zustandekommen gewisser Ticketpreise in Angeboten der Deutschen Bahn. Sie verstehen die Aufgabenstellung, so wie sie in dem Video formuliert wird, sehr wörtlich und versuchen, ausgehend vom Ticket für 135€, zu erklären, wieso das andere Ticket nur 118€ kosten kann. Argumentiert wird beispielsweise über billigere Tarifgebiete, die Bahn-Card, Zeitkarten oder andere Ermäßigungskarten. Es wird davon ausgegangen, dass Marie durch ein Angebot der Deutschen Bahn ein billigeres Ticket bekommen hat (z.B. durch frühes Buchen oder eine Ermäßigungskarten), als es üblicherweise der Fall wäre. Die SuS lassen bei diesem Lösungsweg alle gegebenen Teilstrecken völlig außer Acht und suchen nach einer allgemeinen Lösung, die ohne mathematische Begründung zu finden ist. Statt die Entwicklung der Preise zu untersuchen, gehen sie z.B. von festgelegten Angebotspreisen aus. Mathematik wird bei diesem Lösungsansatz nicht verwendet.

Lösungsweg 8: „Zwischenstopps“, $n=16$

Überraschend viele SuS haben die Begründung des Fahrpreises in der Anzahl der Zwischenstopps gefunden. Dafür wurden die Halte des ICE zum einen auf der kompletten Strecke (München-Berlin) und zum anderen auf der Teilstrecke von Frankfurt nach Berlin gezählt. Daraus ergeben sich zwei verschiedene Schlussfolgerungen. Die einen SuS sind der Meinung, dass mehr Zwischenstopps auch ein teureres Ticket bedeuten. Damit rechtfertigen sie, dass Marie mehr zahlen muss, gehen aber nicht darauf ein, wieso die Preisdifferenz so gering ist. Andere behaupten, eine lange Strecke mit vielen Stopps bedeute einen Preisnachlass. Damit begründen sie, warum der Preisunterschied nur 17€ beträgt und nicht deutlich mehr, wie es bei einer so viel längeren Strecke zu erwarten wäre. Zu beiden Varianten werden Schülerlösungen aufgeführt.

Marie fährt von München Hbf nach Berlin Ostbahnhof für 135,00 €

Anne fährt von Frankfurt nach Berlin Ostbahnhof für 118,00 €

Marie: 451 km bis Frankfurt bis Berlin sind es 1029 km

Anna: 578 km ist es bis Berlin

~~Marie~~ Marie: Sie muss ^{nur} 17€ mehr bezahlen, weil sie öfter als die Anna hält und kleine Zwischenstopps macht

Marie: Marie hält während ihrer Fahrt 16 mal an während Anna nur 10 mal mit dem Zug anhält.

Abb. 12: Schülerlösung zu Lösungsweg 8.

Dies ist eine Version davon, dass viele Zwischenstopps einen hohen Preis ausmachen. Die Schülerin hat die Zwischenstopps gezählt und erkannt, dass Marie auf der langen Strecke wesentlich öfter anhält. Daher muss Marie ihrer Meinung nach auch etwas mehr bezahlen. Ihre Vermutung lautet wohl, je mehr Halte die Strecke hat, desto länger ist die Strecke und dadurch müsste auch ein höherer Preis entstehen. Der Preis ist auch tatsächlich höher, doch warum der Preisunterschied nur 17€ beträgt und nicht mehr, obwohl doch wesentlich mehr Halte eingelegt werden, erklärt sie nicht. Dass es einen Unterschied gibt, erkennt sie, aber wie er entsteht, bleibt offen.

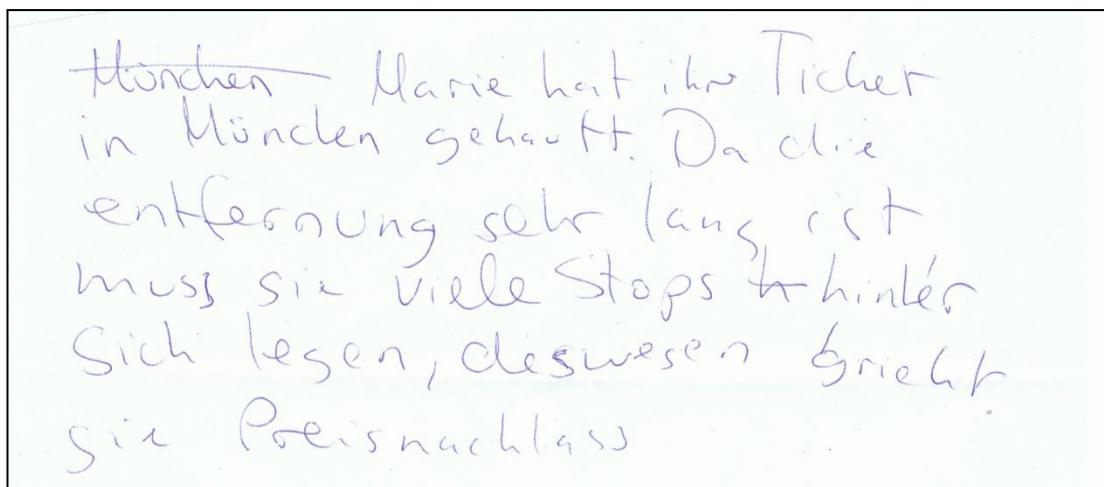


Abb. 13: Schülerlösung zu Lösungsweg 8.

Dies ist die Variante des günstigeren Tickets aufgrund der Zwischenstopps. Die Schülerin geht davon aus, dass mehr Stopps ein günstigeres Ticket bedeuten. Vielleicht kommt diese Erkenntnis daher, dass sie festgestellt hat, dass keine Linearität besteht. Es kann also nicht gelten, je mehr Stopps, desto teurer. Ansonsten würde die Gesamtstrecke wesentlich teurer ausfallen als nur 17€ mehr als für die Teilstrecke Frankfurt-Berlin. Daher geht sie vom Gegenteil aus und weist den Zwischenstopps einen Preisnachlass zu.

Lösungsweg 9: „Fahrtzeit“, $n=1$

Diese Herangehensweise lässt sich nur bei einem einzigen Schüler wiederfinden. Er versucht die Streckenlänge mit der Fahrtzeit zu vergleichen.

München Hbf 10:28 7 km
 München Pasing ab 10:36 5 km
 Stuttgart Hbf an 12:47 ab 12:51 107 km
 Ulm Hbf an 11:49 ab 11:51 93 km
 Mannheim Hbf an 13:29 ab 13:31 79 km
 Frankfurt (Main) Hbf an 14:08 ab 14:13 ~~km~~ 22 km

Augsburg Hbf an 11:01 ab 11:03 87 km

Marie fährt 02:19 Stunden ~~der~~ von München bis Stuttgart. Sie wartet 5 Minuten und fährt dann 38 Min bis nach Mannheim Hbf. Das sind nochmal 79 km also bis jetzt 193 km und 02:57 Stunden plus 5 Minuten Wartezeit. Von Mannheim bis nach Frankfurt fährt Marie nach weiteren 5 Min. Wartezeit weitere 37 Minuten und 22 km. Sie braucht bis nach Frankfurt also ~~206 Stunden~~ ~~02:24~~ Stunden mit München Pasing und Augsburg Hbf und Ulm Hbf also

7	451 km und
55	
87	
93	
107	
79	
+	
<u>323</u>	
<u>451</u>	

<u>München Hbf - München Pasing</u>	
8 min	Augsb
<u>München Pasing - Ulm Hbf</u>	
25 min	
<u>Augsburg - Ulm</u>	
46 min	
<u>Ulm - Stuttgart</u>	
48	

Abb. 14: Schülerlösung zu Lösungsweg 9.

Der Schüler notiert einzelne Teilstrecken mit der jeweiligen Fahrtzeit und der Streckenlänge. Dabei kommt er für die Strecke von München nach Frankfurt auf 451 km. Da er den Flyer falsch liest, stimmt diese Länge nicht, denn 451 km entsprechen der Strecke von München nach Hanau, was eine Station zu weit ist. Die Fahrtzeit berechnet er nicht vollständig. Vielmehr verschriftlicht er Maries Fahrplan. Vermutlich wollte er die reine Fahrtzeit berechnen, d.h. ohne Wartezeiten. Dabei hatte er wohl Schwierigkeiten und kommt daher auch auf keine Gesamtfahrtzeit. Hätte er das geschafft, könnte er der Strecke eine Zeit zuweisen und anhand dessen

herausfinden, ob diese beiden Faktoren für den Preisgenerator ausschlaggebend sind. Er hat also wahrscheinlich erkannt, dass sich der Preis nicht nur über die Strecke ausmachen lässt und sucht daher nach einer weiteren Information, die er mit einbeziehen kann. Diese denkt er in der Fahrzeit gefunden zu haben. Mit diesem Ansatz kommt der Schüler zu keinem endgültigen Ergebnis, welches die Fragestellung beantwortet.

Lösungsweg 10: „Ökonomie“, n=6

Bei dieser Lösungsmöglichkeit haben die SuS rein außermathematisch argumentiert. Einerseits betrachten sie die Strompreise und behaupten, Marie müsse mehr bezahlen, weil der Zug auf ihrer Strecke mehr Strom verbrauche. Dass das die Fragestellung nicht beantwortet, erkennen sie zunächst nicht. Andererseits wird die Anzahl der Fahrgäste herangezogen. Sollte es der Fall sein, dass mehr Menschen von München nach Berlin fahren als von Frankfurt nach Berlin, kostet das Ticket trotz der großen Streckendifferenz nicht mehr als die längere Strecke, da sich der Preis auf mehr Menschen verteilt und dadurch gering bleibt. Am spannendsten ist die Idee der Einbindung von Fluggesellschaften. Einige SuS stellen fest, dass die sehr lange Strecke von über 1000km auch mit dem Flugzeug zurückgelegt werden kann. Damit sich die Fahrgäste aber für die Deutsche Bahn entscheiden, dürfen ihre Preise nicht höher sein als ein Flugticket. Als Grund für den vergleichsweise niedrigen Ticketpreis von 135€ wird also die Konkurrenz gegenüber der Fluggesellschaft gesehen.

Zu diesem Lösungsweg passt eine aktuelle Studie zum Vergleich der Bahnpreise mit Flugticketpreisen. Demnach sei die Bahn in 91,5% der untersuchten Fälle günstiger als das Flugzeug. Dies sei aber nur eine Anmerkung zu Lösungsweg 10. Im Weiteren wird darauf nicht näher eingegangen oder zurückgegriffen. Ein Artikel aus der Süddeutschen Zeitung zu dieser Studie ist im Anhang zu finden.

$$\begin{array}{l}
 \text{1247 311} \\
 7+55+87+93+107+79+23 = \overset{479}{157} = m \text{ bis } F \\
 \\
 23+87+90+45+100+42+79+75+6 = 607 \\
 \\
 \text{Die Luftlinie von München Hbf bis Berlin Ostbahnhof gleiche} \\
 \text{Luftlinie von Augsburg bis Berlin Ostbahnhof} \\
 \\
 \text{Konkurrenz gegenüber Fluggesellschaften; deswegen machen sie} \\
 \text{die Preise für langstrecken nicht so teuer}
 \end{array}$$

Abb. 15: Schülerlösung zu Lösungsweg 10.

Hier hat der Schüler die Streckenlängen von München nach Frankfurt und von Frankfurt nach Berlin berechnet. Die erste Teilstrecke hat er falsch berechnet, da er den Flyer falsch gelesen hat und dadurch die Strecke bis nach Hanau berechnet hat. Die Strecke von Frankfurt nach Berlin Ostbahnhof, wo Sofie wohnt, stimmt mit 601km. Warum er diese Strecken bestimmt hat, ist aber unklar, da er nicht weiter mit ihnen argumentiert. Als nächstes nennt er die Strecken München-Berlin und Augsburg-Berlin. Da Augsburg die nächste Station nach München ist, vermutet er wohl, dass München und Augsburg recht nahe beieinander liegen, und daher können sich die jeweiligen Strecken nach Berlin in ihrer Länge nicht groß unterscheiden. Aus der Preistabelle kann der Schüler entnehmen, dass die Strecke von München nach Augsburg etwa 17€ betragen muss, da die Strecke von München-Pasing nach Augsburg aufgelistet ist und 17,50€ kostet. Dies entspricht in etwa dem im Video genannten Preisunterschied der Tickets München-Berlin und Frankfurt-Berlin. Was ihm diese Erkenntnis bringt (falls er sie hatte), wird aber nicht weiter deutlich, da Ausführungen dazu fehlen. Doch die Idee der Luftlinie scheint ihn auf das Transportmittel der Luft zu bringen. Und dadurch kommt er auf die Vermutung, dass die Deutsche Bahn ihre Preise für solche langen Strecken nicht teurer machen kann als sie momentan sind, da ansonsten viel mehr Reisende das Flugzeug wählen würden. Um also konkurrenzfähig zu bleiben, muss die Deutsche Bahn ihre Preise anpassen. Diese Idee ist sehr kreativ, da sie interessante Bereiche der außermathematischen Welt mit einbezieht.

Lösungsweg 11: „Unbrauchbar“, $n=12$

Unter dieser Kategorie werden alle Schülerergebnisse zusammengefasst, die als unbrauchbar bezeichnet werden können. Dazu gehören leer abgegebene Blätter sowie unsinnige Antworten, wie z.B., dass Marie schwarz fahren sollte. Dass die SuS zu keinem Lösungsansatz gekommen sind, kann daran liegen, dass sie die Aufgabe nicht verstanden haben, keinen Bezug zu der Fragestellung herstellen konnten oder schlichtweg unmotiviert waren. Die Gründe können sehr unterschiedlich sein und können im Nachhinein nicht mehr nachvollzogen werden.

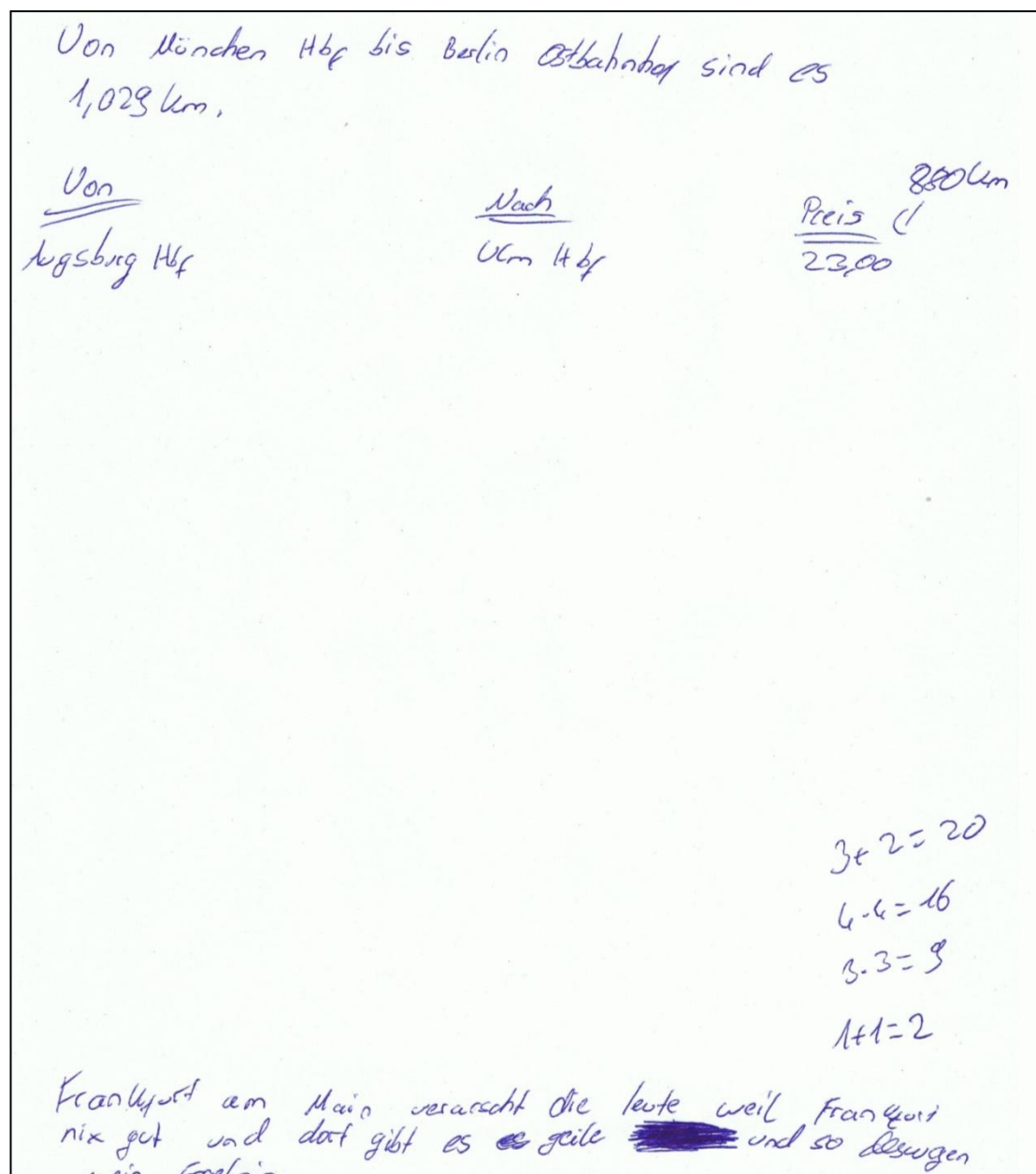


Abb. 16: Schülerlösung zu Lösungsweg 11.

Um ein Beispiel für einen unbrauchbaren Ansatz aufzuführen, soll diese Schülerlösung aufgezeigt werden. Auf dem oberen Teil des Blattes hat der Schüler sogar mit einer richtigen Tatsache begonnen, nämlich, dass Berlin und München 1029km voneinander entfernt sind. Weiterhin listet er eine Teilstrecke mit dem Preis und der Streckenlänge auf. Die Streckenlänge ist allerdings nicht korrekt. An sich scheint dieser Lösungsansatz noch brauchbar. Der Schüler weist den Ansatz einer Tabelle auf, in der die Strecken geordnet werden könnten. Aus der Unterrichtsbeobachtung⁷ geht jedoch hervor, dass sowohl der berechnete Wert als auch die Idee, weitere Preise zu notieren, abgeschrieben wurden und nicht aus eigenen Überlegungen stammen. Daher ist es auch nicht verwunderlich, was am unteren Rand des Blattes zu lesen ist. Vollkommen kontextfrei notiert er banale Additions- bzw. Multiplikationsaufgaben, die rein gar nichts mit der Aufgabe zu tun haben. Sein Kommentar unterstreicht die Aussage, dass er keinerlei sinnvollen Bezug zur Aufgabe herstellen konnte und daher keine eigenständige Lösung aufführen kann. Solche und ähnliche Lösungen von SuS mit unqualifiziertem Kommentar wurden in dieser Kategorie zusammengefasst. Sie macht einen Anteil von 9% aller Lösungen aus. Worauf das zurückgeführt werden könnte, soll unter „Schülerschwierigkeiten“ geklärt werden.

4.1.2 Auswertung der Lösungsansätze

Tabelle 4: Gesamtübersicht über die Verteilung der Kriterien und Lösungswege.

	Schule				Geschlecht						Klassenstufe				Alter										Gesamt			
	A		B		m		w		o.A.		Klasse 9		Klasse 10		13 Jahre		14 Jahre		15 Jahre		16 Jahre		17 Jahre				o.A.	
	rel.	abs.	rel.	abs.	rel.	abs.	rel.	abs.	rel.	abs.	rel.	abs.	rel.	abs.	rel.	abs.	rel.	abs.	rel.	abs.	rel.	abs.	rel.	abs.			rel.	abs.
Lösungsweg 1	13	41%	19	59%	9	28%	21	66%	2	6%	10	31%	22	69%	0	0%	5	16%	13	41%	8	25%	4	12%	2	6%	32	23,9%
Lösungsweg 2	6	86%	1	14%	4	57%	3	43%	0	0%	0	0%	7	100%	0	0%	0	0%	5	71%	2	29%	0	0%	0	0%	7	5,2%
Lösungsweg 3	0	0%	6	100%	1	17%	5	83%	0	0%	0	0%	6	100%	0	0%	0	0%	1	17%	3	50%	2	33%	0	0%	6	4,5%
Lösungsweg 4	4	19%	17	81%	14	67%	7	33%	0	0%	6	29%	15	71%	0	0%	4	19%	11	52%	5	24%	1	5%	0	0%	21	15,7%
Lösungsweg 5	1	6%	17	94%	7	39%	10	56%	1	5%	15	83%	3	17%	0	0%	9	50%	6	33%	2	11%	0	0%	1	6%	18	13,4%
Lösungsweg 6	4	80%	1	20%	4	80%	1	20%	0	0%	0	0%	5	100%	0	0%	0	0%	2	40%	2	40%	1	20%	0	0%	5	3,7%
Lösungsweg 7	1	10%	9	90%	7	70%	3	30%	0	0%	3	30%	7	70%	1	10%	1	10%	4	40%	4	40%	0	0%	0	0%	10	7,5%
Lösungsweg 8	3	19%	13	81%	6	37%	10	63%	0	0%	11	69%	5	31%	1	6%	4	25%	6	38%	5	31%	0	0%	0	0%	16	11,9%
Lösungsweg 9	0	0%	1	100%	1	100%	0	0%	0	0%	1	100%	0	0%	0	0%	1	100%	0	0%	0	0%	0	0%	0	0%	1	0,7%
Lösungsweg 10	3	50%	3	50%	6	100%	0	0%	0	0%	1	17%	5	83%	0	0%	0	0%	4	67%	2	33%	0	0%	0	0%	6	4,5%
Lösungsweg 11	3	25%	9	75%	9	75%	3	25%	0	0%	6	50%	6	50%	0	0%	1	8%	4	34%	6	50%	0	0%	1	8%	12	9,0%
Gesamt	38	28%	96	72%	68	51%	63	47%	3	2%	53	40%	81	60%	2	1%	25	19%	56	42%	39	29%	8	6%	4	3%	134	100,0%

⁷ Während der Durchführungen wurden Auffälligkeiten handschriftlich notiert. Sie werden aber nicht weiter ausgeführt, da sie kein eigenes Bewertungskriterium darstellen und nur an einigen Stellen zur Ergänzung herangezogen werden.

⁸ Anmerkung zur Tabelle: Die absoluten Anteile ergeben je Lösungsweg innerhalb eines Kriteriums 100%.

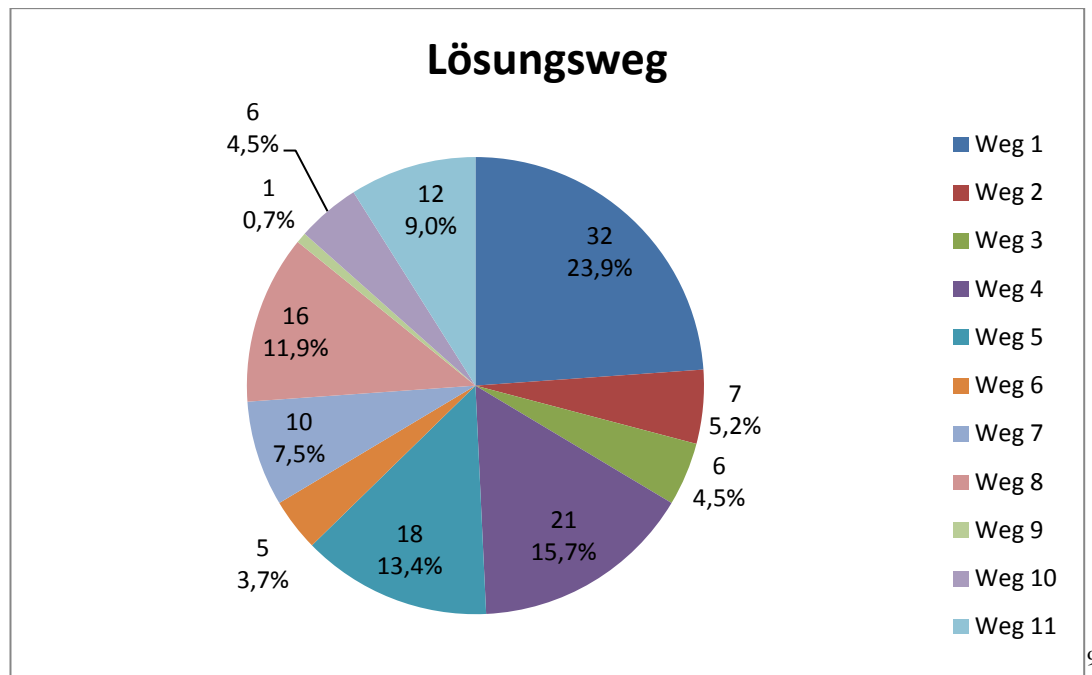


Diagramm 3: Verteilung der Lösungswege.

Zu Beginn lässt sich feststellen, dass mit 23,9% ($n=32$) fast ein Viertel der SuS den Lösungsweg 1 (Streckenlänge) gewählt hat. Vermutlich liegt er am nächsten. Denn es wird nach dem Preis gesucht, welcher von der Strecke abhängig ist. Daher rechnen die SuS auch mit der Strecke. Ähnlich sind die SuS des Lösungsweges 4 vorgegangen, der mit 15,7% ($n=21$) am zweit häufigsten vorkommt. Statt mit der Strecke haben diese SuS mit dem Preis argumentiert. Auch diese Herangehensweise ist naheliegend. Denn die Fragestellung bezieht sich auf den Preis, also wird auch mit diesem gerechnet. Erfreulicherweise haben fast genauso viele SuS es geschafft, die Beziehung zwischen Strecke und Kosten herzustellen (Lösungsweg 5 mit $n=18$). Neben diesen zielführenden Antworten gab es weitere interessante Lösungsansätze. Vor allem der Gedanke zur Konkurrenz gegenüber der Fluggesellschaft ist sehr spannend. Wäre die vorliegende Bahn-Aufgabe nicht im Rahmen einer Modellierungsaufgabe gestellt worden, wären solche Antworten wahrscheinlich nicht vorgekommen. Denn im Mathematikunterricht wird meistens auf das gerade Gelernte zurückgegriffen. Offenen Aufgabenstellungen wird daher eher wenig Raum gegeben. Modellierungsaufgaben ermöglichen den SuS also, über den mathematischen Horizont hinauszuschauen und Aufgaben aus der realen Welt auf individuelle und dem Niveau entsprechende Weise zu lösen.

⁹ Die Darstellungsform der Verteilungen wird bei jedem Diagramm individuell gewählt, abhängig davon, wie die Informationen am besten gelesen und entnommen werden können (z.B. ob mit Hilfe der relativen oder der absoluten Angaben).

Geschlecht

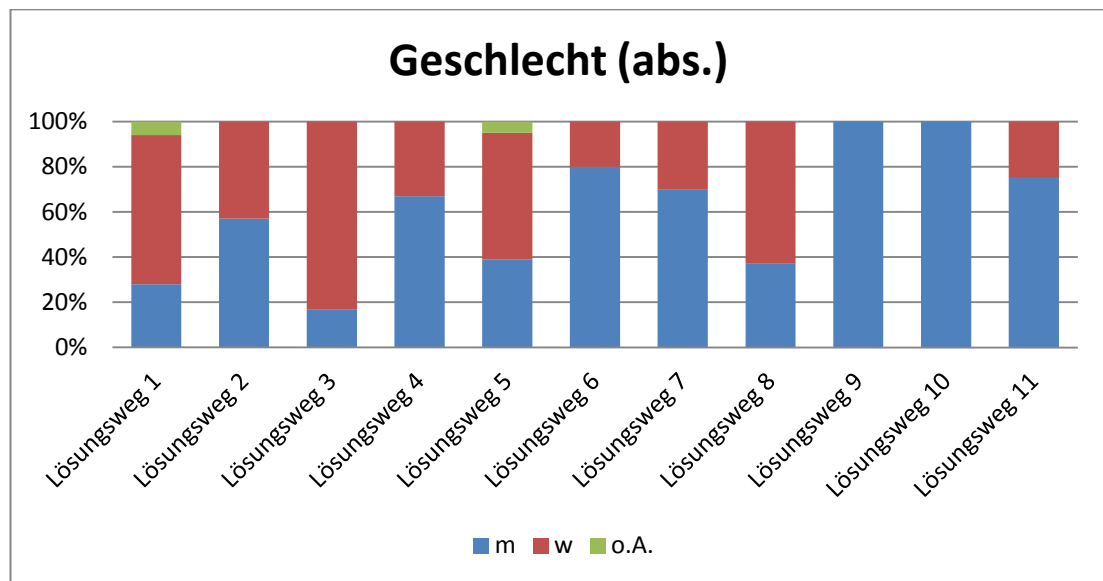


Diagramm 4: Verteilung der Geschlechter auf die Lösungswege.

Zwischen den Geschlechtern lässt sich feststellen, dass die Mädchen vor allem die mathematischen Herangehensweisen genutzt haben. Sie dominieren vor allem Lösungsweg 1 und Lösungsweg 3, bei denen direkt mit den Streckenlängen oder Preisen gerechnet wird. Sie haben mit den vorhandenen Informationen gearbeitet und versucht, das gesuchte Ergebnis mathematisch zu berechnen. Lösungsweg 6, Lösungsweg 7 und Lösungsweg 10 (Preis pro km, Angebote, Ökonomie) werden bevorzugt von den Jungen gewählt. Sie scheinen recht linear zu denken und versuchen, eine möglichst plausible Erklärung für die Preisentwicklung zu finden, indem sie z.B. davon ausgehen, dass es immer einen Preis pro Kilometer gibt, an dem sie sich orientieren können. Sie scheinen neben der mathematischen Lösung aber auch nach anderen Erklärungen zu suchen. Ökonomische Faktoren lassen sie nicht außer Acht. Bei den unbrauchbaren Antworten überwiegt ihr Geschlecht. Vielleicht fehlt ihnen (mehr als den Mädchen) genügend Motivation oder ein gewisser Ansporn um diese Aufgabe zu lösen.

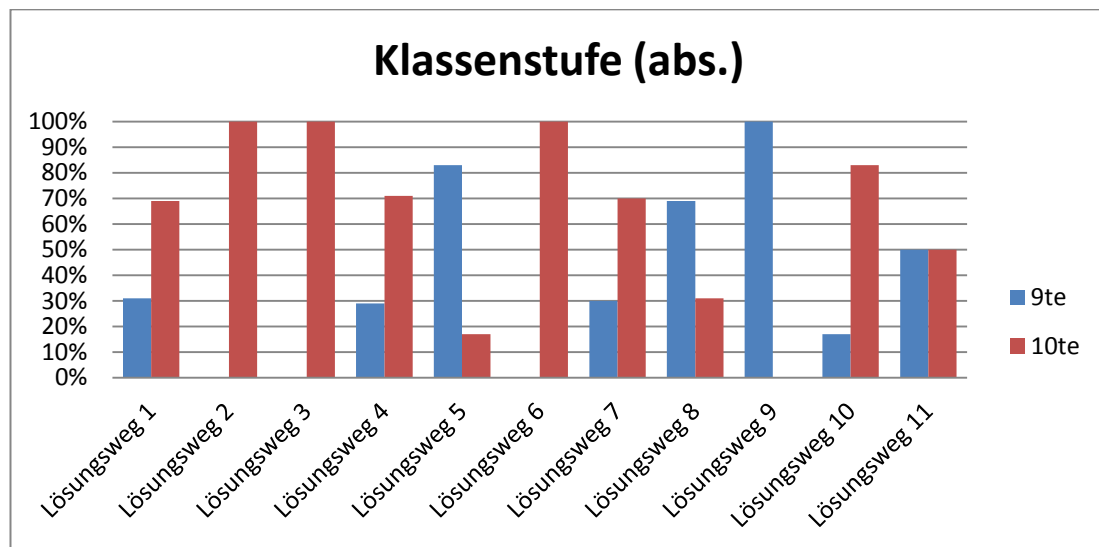
Klassenstufe

Diagramm 5: Verteilung der Klassenstufen auf die Lösungswege.

Auffällig bezüglich der Klassenstufen ist die Wahl des Lösungsweges 5 ($n=18$). Überwiegend wurde dieser von den neunten Klassen gewählt ($n=15$). Dies kann daran liegen, dass lineare Funktionen in der Realschule am Ende der achten Klasse thematisiert werden und zu Beginn der neunten Klasse darauf aufbauend Lineare Gleichungssysteme behandelt werden (vgl. Lehrplan Mathematik Realschule). Und da diese Studie früh im Schuljahr stattgefunden hat, liegt die Wahl des Themengebietes der linearen Funktion bzw. der linearen Gleichungssysteme zu Beginn der neunten Klasse zur Erschließung der Preisentwicklung nahe. Die SuS werden wohl darauf zurückgegriffen und versucht haben, ihr aktuelles Wissen anzuwenden. Lösungsweg 2, Lösungsweg 3 und Lösungsweg 6 wurden nur von SuS der zehnten Klasse gewählt. Sie versuchen, in der Luftlinie, dem Preis bzw. Kilometerpreis die Preispolitik der Deutschen Bahn zu erfassen. Lösungsweg 1, Lösungsweg 4, Lösungsweg 7 und Lösungsweg 10 werden von der zehnten Klasse dominiert. Die neunte Klasse überwiegt lediglich bei Lösungsweg 5, Lösungsweg 8 und Lösungsweg 9. Lösungsweg 5 wurde bereits zu Beginn thematisiert. Lösungsweg 9 wurde nur von einem Schüler gewählt, daher kann darüber keine aussagekräftige Angabe gemacht werden. Dass Lösungsweg 10 mit Bezug zur Ökonomie wurde vielleicht deshalb gewählt, weil dazu keine mathematischen Argumente aufgeführt werden müssen. Womöglich fiel es den SuS der neunten Klassen nicht leicht, einen mathematischen Bezug zur Aufgabe herzustellen. Und aus diesem Grund haben sie nach außermathematischen Erklärungen gesucht. Bei beiden Klassenstufen wurden unbrauchbare Ansätze gleichermaßen deklariert.

Alter

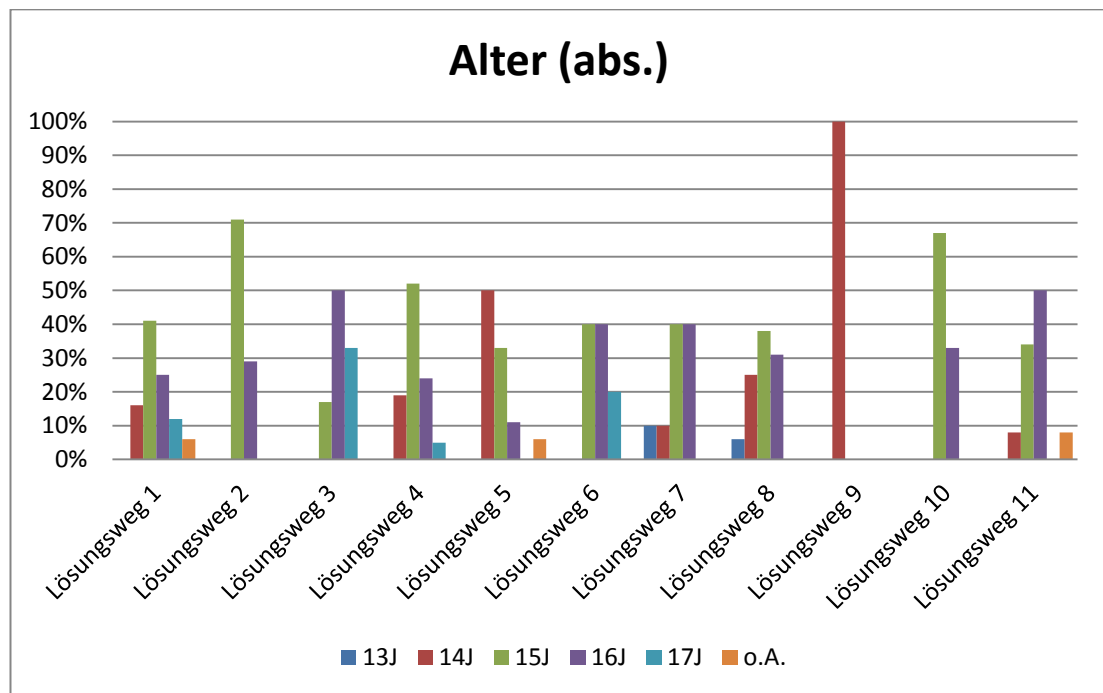


Diagramm 6: Verteilung der Altersgruppen auf die Lösungswege.

Bezüglich des Alters lassen sich keine aussagekräftigen Unterschiede ausmachen, die nicht auf die Klassenstufe zurückzuführen wären.

Schule

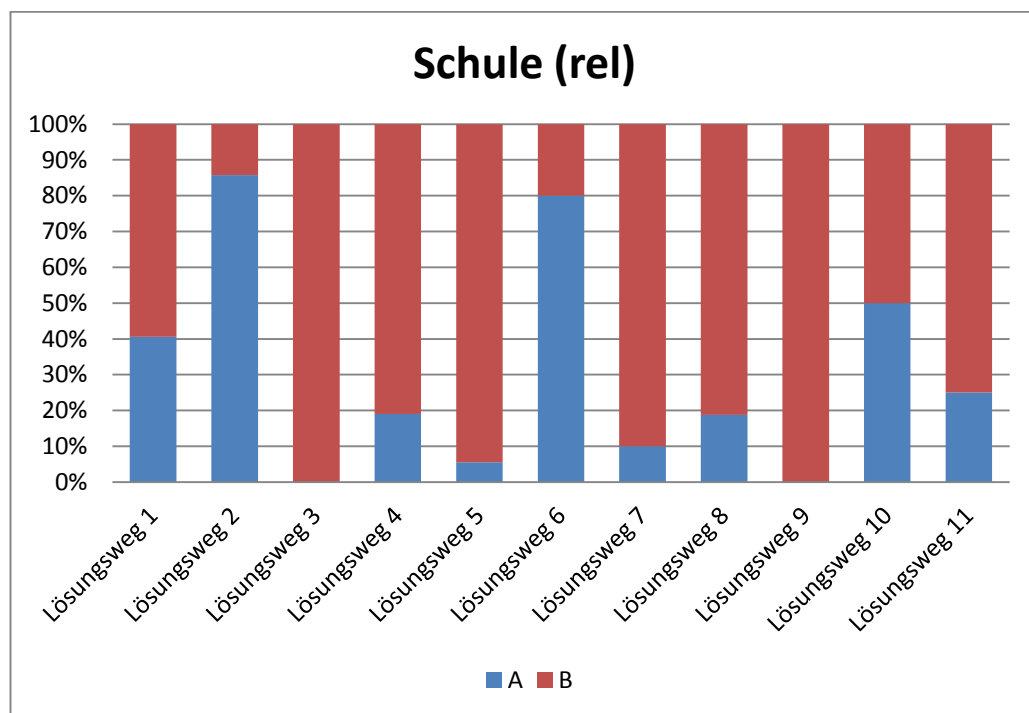


Diagramm 7: Verteilung der Schulen auf die Lösungswege.

Schule A dominiert Lösungsweg 2 und Lösungsweg 6. Allerdings muss auch bedacht werden, dass mehr als doppelt so viele SuS, die in diese Studie einfließen, zu Schule B gehören. Daher ist von vornherein klar, dass Schule B in den meisten Fällen überwiegt. Nichtsdestotrotz sticht Schule A bei Lösungsweg 2 und Lösungsweg 6 hervor. Diese SuS befassen sich mit der Luftlinie und dem Kilometerpreis. Welche Gründe dies hat, ist unklar. Es kann aber vermutet werden, dass sie sich auf den Begriff der Linearität konzentriert haben, und mit Hilfe des Ticketpreises bzw. des Kilometerpreises zeigen wollten, dass dieser sich linear entwickelt. Zumindest wäre dies die erste Idee, die den SuS bei der Aufgabe kommen könnte. Spätestens nachdem einige Argumente gefunden wurden, die gegen die Linearität sprechen, erkennen auch sie, dass die Preisentwicklung anders verlaufen muss.

4.2 Einteilung der Schülerergebnisse in Level

Nach der Differenzierung der Lösungswege folgt nun die Bewertung der Schülerergebnisse durch eine Einteilung in Level. Die Level ergeben sich durch die Teilschritte des Modellierungskreislaufes und sind von den in den Bildungsstandards formulierten Kompetenzen unabhängig. Je mehr Teilschritte ein Schüler bewältigt, desto höher ist auch sein Level. Das Modell des Kreislaufes stellt eine wirksame Hilfe zur Beurteilung der Schülerergebnisse dar (vgl. BLUM 2006b, S.11). Es soll geschaut werden, wie weit die SuS bei ihren Lösungen gekommen sind bzw. wie weit sie den Modellierungskreislauf durchlaufen konnten¹⁰. Anhand dessen kann dann gefolgert werden, welcher Lösungsweg insgesamt das höchste Level erreicht und damit am zielführendsten zu sein scheint. Es ist aber wichtig zu erwähnen, dass die Level-Einteilung kein Bewertungsschema ist. Um eine Modellierungsaufgabe z.B. in einer Klassenarbeit zu bewerten, sollte sich nicht an diesen Leveln orientiert werden. Für solche Zwecke gibt es ein spezielles Bewertungsschemata¹¹. Durch die Einteilung in Level entsteht keine Verbindung zu den sechs Schulnoten. Die Level dienen lediglich dazu, im Rahmen dieser Studie zu erkennen, wie weit SuS bei der Problemlösung gekommen sind und bei welchem Schritt im Modellierungskreislauf eine Hürde für sie aufgetreten ist. Daher erscheint eine an Teilschritten des

¹⁰ Der Modellierungskreislauf an sich ist den SuS unbekannt, d.h. sie durchlaufen die Teilschritte nicht bewusst.

¹¹ Ein mögliches Schema zur Bewertung von Modellierungsaufgaben beschreibt MAAB (vgl. MAAB 2007, S.40).

Modellierungskreislaufs orientierte Einteilung in Level zur Einordnung der Schülerlösungen als geeignetes Raster.

Alle Schritte des Kreislaufes stellen potentielle kognitive Hürden dar (vgl. BLUM 2006b, S.11) und durch die Level kann genau ausgemacht werden, welcher Schritt die größte Hürde ausmacht. Natürlich kann diese Einteilung in Level sehr kritisch betrachtet werden. Denn ein großes Problem des Modellierens stellt die Bewertung der einzelnen Lösungswege dar. Sie sind sehr unterschiedlich und können nicht wie reine Rechenaufgaben nach dem gleichen Schema bewertet werden. Jede Schülerlösung muss einzeln untersucht werden. Daher müssen zunächst eindeutige Abstufungen beschrieben werden, die hier in Form von Level wiederzufinden sind. Dann werden die Schülerlösungen einzeln betrachtet und es wird analysiert, welche Anforderungen die Lösung erfüllt und zu welchem Level sie gehört. Diese Zuschreibung zu den Level beruht auf der Interpretation des Auswertenden. Er allein analysiert die Schülerlösungen und bestimmt durch seine Interpretation, welches Level einem Schüler zugeteilt wird. Erschwert wird dies zusätzlich durch fehlende Bemerkungen seitens der SuS auf den Lösungsblättern, was es erschwert, den Gedankengang der SuS nachzuvollziehen. So liegt es beim Auswertenden, die vorliegenden Lösungen zu interpretieren und die Idee hinter der Lösung zu erfassen. Bei wissenschaftlichen Studien ist es üblich, dass zwei Personen unabhängig voneinander die Daten bewerten. Mit Hilfe des Cohens-Kappa-Testes kann dann bestimmt werden, wie unabhängige Beobachter die Lösung bewertet haben. Dadurch könnte gesichert werden, dass die Schülerlösungen gerechtfertigt den Leveln zugeteilt werden und nicht auf der Bewertung eines Einzelnen beruhen. Da diese Studie von einer Einzelperson geführt wurde, musste darauf verzichtet werden. Doch trotz der manchmal vielleicht subjektiven Interpretation, stellt die Verwendung der Level für den Zweck der vorliegenden Studie ein geeignetes Raster dar und wird daher zur Bewertung der Schülerlösungen verwendet.

4.2.1 Beschreibung der Level

Aus den Teilschritten des Kreislaufes nach BLUM UND LEISS (2005) ergeben sich für diese Studie folgende 7 Level¹²:

¹²Die Idee, Level festzulegen, hatte LUDWIG erstmals bei der Auswertung der Ananas-Aufgabe (vgl. LUDWIG, XU 2009). Die Einteilung und Inhalte der Level wurden allerdings nicht übernommen, sondern der vorliegenden Aufgabe angepasst.

*Level 0*¹³: Die SuS haben die Aufgabe nicht so beantwortet, wie es zu erwarten wäre. Sie haben beispielsweise sinnlose Kommentare notiert oder ein leeres Blatt angegeben. Es ist nicht zu erkennen, dass die Aufgabe zu lösen versucht wurde. Bereits der erste Schritt (Verstehen) des Modellierungskreislaufes wurde wahrscheinlich nicht bewältigt. Zumindest ist dies die am nächsten liegende Erklärung. Bei einem leer abgegebenen Blatt können aber natürlich auch andere Faktoren der Grund dafür sein, z.B. Demotivation.

Level 1 „Verstehen“: SuS, die Level 1 erreichen, haben die Aufgabenstellung verstanden. Sie haben z.B. die Fragestellung („Wie entstehen diese Preise?“) notiert oder eine Idee aufgeschrieben. Sie sind jedoch nicht in der Lage, mit den Informationen zu arbeiten. Der Sprung von der realen Welt in die der Mathematik gelingt nicht. Der Schüler hat ein Situationsmodell gebildet, ist aber nicht in der Lage, die Informationen zu strukturieren und daraus ein Realmodell zu bilden. Er hat auf seinem Blatt beispielsweise die Strecken und Ticketpreise von Anna und Marie notiert, die in der Aufgabe gegeben wurden, konnte aber keine weiteren Informationen filtern und mathematische Ansätze aufführen.

Level 2 „Vereinfachen/Strukturieren“: Der Schüler kann ein Realmodell aus dem Situationsmodell bilden, indem er die Aufgabe auf die wesentlichen Merkmale reduziert und diese strukturiert. Aus diesen Merkmalen könnte sogar ohne Rechnung eine Schlussfolgerung gezogen werden, die den Preisgenerator erklärt. Der Schüler könnte beispielsweise die wichtigsten Fakten der Aufgabe notieren und dazu eine übersichtliche Tabelle erstellen, in der Preis und Streckenlänge miteinander in Beziehung gesetzt werden. Ohne konkrete Rechnung könnten sich daraus schon erste Vermutungen ergeben. Diese Vermutungen reichen aus, um den Schüler in dieser Studie als Level 2 zu deklarieren, obwohl er kein mathematisch begründetes Ergebnis vorweist. Denn mit Erreichen dieses Levels hat der Schüler die Aufgabe verstanden und strukturiert. Da noch keine Rechnung vorhanden ist, ist der Übergang zum Mathematischen Modell nicht vollzogen. Aus diesem Grund erreicht der Schüler trotz erläuterter Vermutung nicht das nächste Level.

¹³ Es gibt ein Level 0, da bei diesem Level keine wirkliche Leistung erbracht wurde. Erst ab dem vollzogenen Teilschritt „Verstehen“ beginnt die Nummerierung mit Level 1.

Level 3 „Mathematisieren“: Der Schüler kann die Situation in die Welt der Mathematik übertragen. Er entwickelt eine mathematische Idee, um das Problem zu lösen. Es sind Ansätze erkennbar, die auf eine mathematische Operation hinweisen. Sobald der Schüler eine mathematische Operation erstellt, erreicht er dieses Level. Es kann z.B. der Ansatz eines Dreisatzes zu sehen sein, der aber nicht zu Ende ausgeführt wurde. Der Schüler kommt zu keinem konkreten Endergebnis. Gelegentlich sind bei den Schülerlösungen aber Teilergebnisse zu sehen, wenn z.B. die Gesamtstrecke berechnet wurde. Erkennbar ist dieses Level daran, dass der Schüler z.B. versucht hat, eine Gleichung aufzustellen, welche die Preisentwicklung darstellen soll, diese aber nicht vollständig löst. Sobald ein Ergebnis für die Frage nach der Preisentwicklung des Tickets vorhanden ist, erreicht der Schüler bereits das nächste Level.

Level 4 „Mathematisch Arbeiten“: Der Schüler kann ein konkretes mathematisches Endergebnis vorweisen¹⁴. Er hat z.B. herausgefunden, dass sich der Preis nicht linear entwickelt. Mathematisch hat er eine Lösung für das Problem gefunden und sieht dieses als korrekt an. Doch da der Bezug zurück zur realen Welt noch nicht geleistet wird, kann nicht überprüft werden, ob das Ergebnis auch sinnvoll ist. Der Schüler hat z.B. den Preis pro Kilometer berechnet, schafft es aber nicht, seine mathematische Lösung so zu formulieren, dass damit die Fragestellung beantwortet werden kann. Im Unterschied zu Level 3 ist ein Ergebnis der Rechnung vorhanden. Dieses wurde aber nicht überprüft und auf die Realsituation übertragen.

Level 5 „Interpretieren und Validieren“: Der Schüler kann sein Ergebnis aus der mathematischen Welt auf die Realsituation und die Fragestellung in der realen Welt interpretieren und diese damit beantworten. Er ist in der Lage, sein Ergebnis kritisch zu betrachten und überprüft bzw. gleicht ab, ob es richtig sein kann. Der Schüler hat beispielsweise die Idee, dass die Deutsche Bahn mit der Luftlinie arbeitet und hat womöglich auch eine Teilstrecke gefunden, für die seine Vermutung stimmt. Anhand weiterer Teilstrecken hat er sich vergewissert, dass seine Idee stimmt oder diese sogar so weit verbessert, bis sie die Frage zufriedenstellend beantwortet. Er hat seine

¹⁴ Es soll nochmal darauf hingewiesen werden, dass die Level nicht einer Bewertung der Leistungen entsprechen. D.h. wenn ein Schüler Level 4 erreicht und ein mathematisches Ergebnis vorweisen kann, spricht dies intuitiv auch für eine gute Leistung. Doch ob das Ergebnis richtig oder falsch ist, spielt bei der Einteilung zu Level 4 keine Rolle. Daher bedeuten hohe Level nicht zwangsläufig gute Leistungen.

Lösung jedoch nicht vermittelt. In dieser Studie ist es nicht möglich, das Ergebnis vollständig zu validieren. Denn den SuS wird die exakte Lösung nicht gegeben, mit der sie ihre eigene Lösung vergleichen können. Dennoch können sie selbst Strecken finden, die ihrer Vermutung zur Preisentwicklung entsprechen. Und je mehr Vergleichsstrecken sie finden, die ihre Vermutung bestätigen, desto wahrscheinlicher ist es, dass ihre Lösung richtig ist. Bei der Auswertung dieses Levels muss außerdem bedacht werden, dass SuS ohne Vorkenntnisse zu Modellierungsaufgaben intuitiv keine Validierung durchführen würden. Da diese auch nicht explizit in der Aufgabenstellung gefordert wurde, ist zu erwarten, dass nur wenige SuS diesen Schritt vollzogen haben.

Level 6 „Vermitteln“: Der Schüler hat den kompletten Modellierungskreislauf durchlaufen. Er hat die Situation verstanden, sie sowohl mathematisch gelöst als auch das Ergebnis auf die Realsituation übertragen. Er hat seine Lösung auf alle nötigen Faktoren kontrolliert und gegebenenfalls verbessert. Außerdem ist er in der Lage, seinen Lösungsweg zu erklären und zu begründen, warum sein Ergebnis richtig sein müsste. Er zieht dazu nicht nur das gegebene Beispiel aus der Aufgabenstellung heran, sondern kann durch seine Lösung auch andere fremde ICE-Ticketpreise erklären. Sein Ergebnis wird damit allgemeingültig und kann auch außerhalb der vorliegenden Aufgabe herangezogen werden. Didaktisch gesehen sollte der Schüler bei diesem Level in der Lage sein, seine Lösung so zu präsentieren, dass seine Mitschüler sie nachvollziehen können. Im Rahmen dieser Studie war dies aus Zeitgründen jedoch nicht möglich. Die SuS hatten lediglich eine Schulstunde zur Bearbeitung der Aufgabe Zeit. Es gab keine Folgestunde, in der die Lösungen verglichen wurden¹⁵. Daher ist dieses Level nur dann zu erreichen, wenn der Schüler sein Ergebnis in schriftlicher Form auf dem Lösungsblatt ausführlich dargelegt hat.

Zu jedem Level werden nun beispielhafte Schülerlösungen aufgeführt und analysiert. Zu Level 0, Level 1, Level 2 und Level 5 wird jeweils eine Schülerlösung dargeboten. Level 3 wurde von etwa 55% aller SuS erreicht und ist deshalb mit drei Schülerlösungen vertreten. Zu Level 4 werden zwei Lösungen beschrieben. Level 6 wurde von keinem Schüler erreicht.

¹⁵ Die Lehrer haben die Lösungen nach der Stunde an die Hand bekommen. Ob und wie sie diese in den folgenden Unterricht integriert haben, wurde nicht nachverfolgt.

Level 0

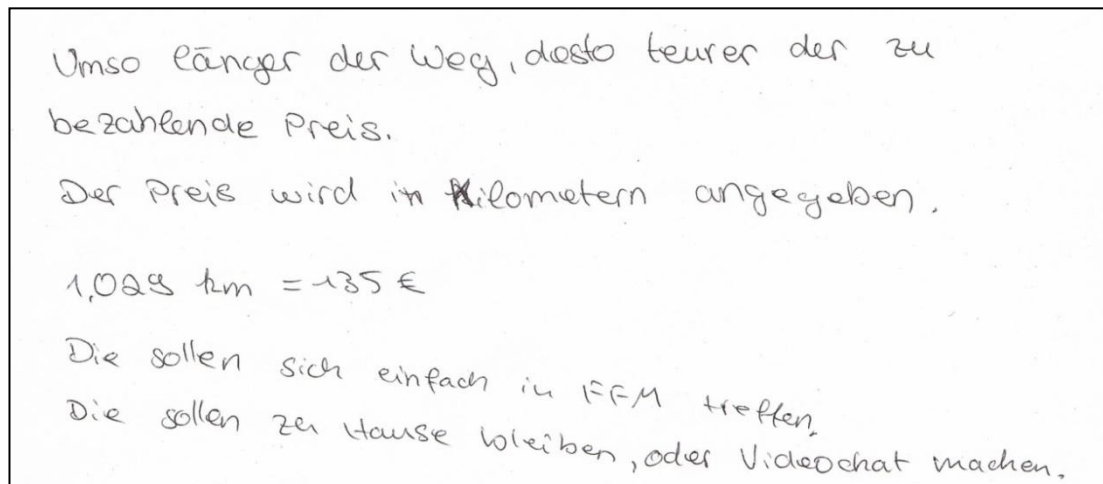


Abb. 17: Schülerlösung zu Level 0.

Wie bereits bei der Beschreibung von Lösungsweg 11 erwähnt, geht aus den Unterrichtsbeobachtungen hervor, dass einige SuS Ergebnisse anderer Mitschüler notiert haben, ohne selbst Rechnungen aufgestellt zu haben. So handhabt es auch dieser Schüler. Er notiert wahllos drei Informationen, die er sich von Mitschülern hat sagen lassen. Darüber hinaus hat er keine eigene Idee, was er mit den Informationen erreichen kann. Seine Notizen sind auch völlig frei von jeder plausiblen Erklärung. Zudem notiert er zwei unqualifizierte Kommentare: die Mädchen sollten sich in Frankfurt treffen (dadurch würde sich die Fragestellung nach den gefragten Ticketpreisen erübrigen und die Aufgabe müsste nicht gerechnet werden, solange man sie nicht umformuliert und nach den Preisen der neuen Tickets von München nach Frankfurt und von Berlin nach Frankfurt fragt) oder sie sollten sich für einen Videochat verabreden (dadurch würde die Frage nach dem Preisgenerator der Bahn ganz verfallen, da keines der Mädchen mit der Bahn fahren müsste). Dem Schüler ist natürlich bewusst, dass seine Kommentare nicht im Geringsten die Fragestellung beantworten. Die notierten mathematischen Ansätze stammen nicht aus eigenen Ideen und seine Kommentare sind widersinnig. Es ist daher nicht zu erkennen, dass er sich selbst näher mit der Aufgabe beschäftigt hat und sie entweder nicht verstanden hat, keine Lust hatte oder womöglich überfordert war. Daher kann ihm nur Level 0 zugewiesen werden.

Level 1

Die Abfahrt von München HBF ist ^{17€} teurer, als die Abfahrt von FFM HBF.
 Die Strecke von München bis Berlin ist länger als die von FFM bis Berlin.

Abb. 18: Schülerlösung zu Level 1.

Diese Schülerin notiert die grundlegenden Fakten, welche in der Aufgabenstellung genannt wurden. Aber da sie zumindest erkennt, dass die teurere Fahrt auch der längeren Strecke entspricht, lässt dies zumindest schon mal darauf schließen, dass die Aufgabe verstanden wurde und ein Situationsmodell entstanden ist. Sie erkennt, worum es in der Aufgabe geht und hebt den Preisunterschied von 17€ extra hervor. Allerdings sind keine weiteren strukturierten Informationen vorhanden. Sie bildet kein Realmodell und gibt auch keinen Hinweis auf eine bevorstehende Rechnung. Daher ist sie dem Level 1 zuzuordnen.

Level 2

München Hbf → Berlin Ostbahnhof 135,00 €
 Frankfurt am Main → Berlin Ostbahnhof 118,00 €
 Berlin Ostbahnhof → Münchener Hbf
 München Hbf → Augsburg 87km
 (55km sind 17,50 €)
 von München Pasing nach Augsburg Hbf
 München Hbf → Stuttgart 107km
 107
 + 79
 + 23
 +

Abb. 19: Schülerlösung zu Level 2.

Bei dieser Schülerin ist zu sehen, dass sie zunächst den beiden gegebenen Strecken (München-Frankfurt, München-Berlin) ihren jeweiligen Preisen zuordnet. Dann schreibt sie weitere Teilstrecken mit dem entsprechenden Preis und der

Streckenlänge nieder. Dies gelingt ihr mehr oder weniger für die Strecken München-Augsburg, München Pasing-Augsburg und München-Stuttgart. Anschließend addiert sie drei Streckenlängen. Zumindest ist dies zu vermuten, da der erste Wert von 107 kurz vorher bei der Streckenlänge von München nach Stuttgart mit 107km auftaucht und die anderen beiden Werte deshalb wohl auch bestimmten Streckenlängen entsprechen. Allerdings hat sie sich bei der Berechnung der Streckenlänge München-Stuttgart verrechnet, da die korrekte Entfernung 242 km beträgt. Doch abgesehen davon ist eine gewisse Struktur in ihrer Lösung zu erkennen. Sie notiert erst das in der Aufgabenstellung Gegebene und arbeitet sich dann mit ausgewählten Strecken schrittweise vor. Ihr Ziel ist es wohl, die Streckenlängen für München-Berlin und Frankfurt-Berlin zu erhalten. Für die Einteilung in das Level 2 ist ausschlaggebend, dass die Schülerin die Aufgabe verstanden und nötige Informationen aus dem Text gefiltert hat, die sie so strukturiert hat, wie sie sie zur Lösung der Aufgabe braucht. Daher kann diese Lösung als Level 2 deklariert werden. Durch den Ansatz der Addition am unteren Blattrand ist zwar eine Rechnung erkennbar. Doch diese wurde nach der Notation von drei Summanden ergebnislos abgebrochen. Daher reicht der abgebrochene Ansatz einer Addition nicht aus, um sie dem Level 3 zuzuordnen.

Level 3

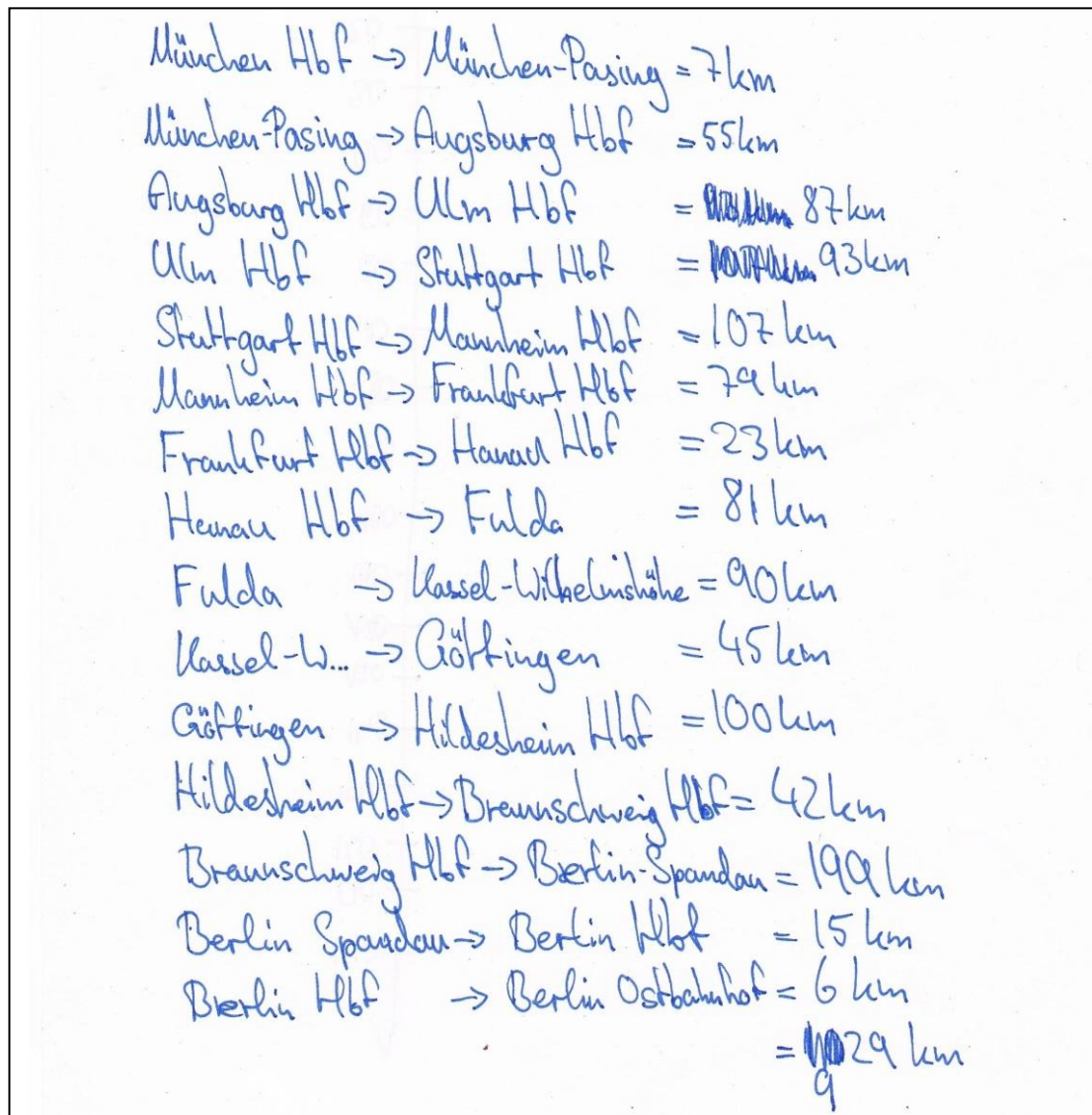


Abb. 20: Schülerlösung zu Level 3 (Vorderseite).

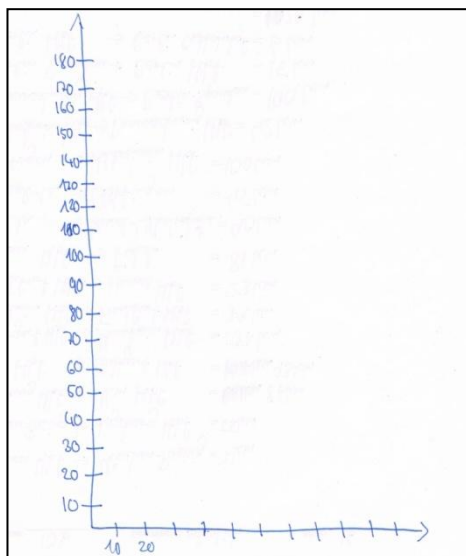


Abb. 21: Schülerlösung zu Level 3 (Rückseite).

Der Schüler hat damit angefangen, alle Strecken von München bis nach Berlin Ostbahnhof einzeln aufzuschreiben und ihre Streckenlängen zu notieren. Vermutlich macht er das aus zwei Gründen. Zum einen schafft er sich zunächst einen Überblick, indem er die ICE-Strecke übersichtlich darstellt. Dies zeigt, dass er die Aufgabe versteht, sich die nötigen Informationen zu seinem Lösungsweg beschafft und diese geordnet darstellen kann. Level 2 hat er damit sicher erreicht. Zum anderen notiert er sich alle Teilstrecken vermutlich deshalb, weil er sie dann auf der Rückseite des Blattes in ein Koordinatensystem übertragen kann. Er versucht also mit den Informationen zu arbeiten, indem er mathematische Operationen anwendet. Dieser Übertrag von der realen in die mathematische Welt rechtfertigt die Zuteilung in Level 3. Mit dieser Idee könnte er nun alle Strecken in das Koordinatensystem eintragen. Allerdings fehlt ihm neben der Streckenlänge noch ein zweiter Wert, der dafür nötig ist, nämlich der Preis. Hätte er diesen noch ergänzt, könnte er die vollständigen Wertepaare in das Koordinatensystem einzeichnen und würde eine Entwicklung des Preises sehen. Damit erhält der Schüler noch kein Endergebnis, liefert aber Teilergebnisse. Daher erreicht der Schüler noch nicht Level 4, erfüllt aber alle Voraussetzungen für Level 3.

Level 3

Marie:

München Hbf - Augsburg	17,50 = 63 km
Augsburg - Ulm	23,00 = 87 km
Ulm Hbf - Stuttgart	25,00 = 93 km
Stuttgart - Mannheim	37,00 = 107 km
Mannheim - Frankfurt	27,00 = 79 km
Frankfurt - Hanau	13,00 = 22 km
Hanau - Fulda	21,00 = 81 km
Fulda - Kassel	25,00 30,00 = 90 km
Kassel - Göttingen	13,50 = 48 km
Göttingen - Hildesheim	25,50 = 100 km
Hildesheim - Braunschweig	14,00 = 62 km
Braunschweig - Berlin	56,00 193 km = 1089 km
	309,50

Abb. 22: Weitere Schülerlösung zu Level 3.

Auch dieser Schüler erreicht mit seiner Lösung Level 3. Seine Idee ähnelt der des zuvor beschriebenen Schülers. Er vermerkt neben der Streckenlänge zusätzlich den jeweiligen Preis aller Teilstrecken. Auch er hat die Aufgabe verstanden und erstellt eine ordentliche Übersicht, was Level 2 erfüllt. Level 3 erreicht er, weil er die Informationen mathematisiert und Operationen an ihnen ausführt. Er schreibt nämlich alle Angaben untereinander auf, wodurch er die Summanden addieren kann und eine Gesamtstreckenlänge sowie einen vermeintlichen Gesamtpreis erhält. Diese Summen stellen zwar kein Endergebnis, aber zumindest ein Teilergebnis dar. Er kann ein Ergebnis der Addition, nicht aber der Aufgabe an sich vorweisen. Der nächste Schritt wäre z.B. gewesen, die Paare aus den Strecken und Preisen in ein Koordinatensystem zu übertragen. Hätte er dies gemacht, könnte er ein mathematisches Resultat vorweisen und hätte Level 4 erreicht.

Level 3

Anna wohnt in Frankfurt fährt nach Berlin Preis 118 €
 Marie wohnt in München fährt nach Berlin Preis 135 €

München	7	+ 55	+ 87	+ 107	+ 79	+ 23 (Frankfurt)	358 km
---------	---	------	------	-------	------	------------------	--------

358	+ 81	+ 90	+ 45	+ 100	+ 42	+ 199	+ 15	+ 6	936 km Berlin
-----	------	------	------	-------	------	-------	------	-----	---------------

München → Berlin = 936 km
 München → Frankfurt = 358 km
 Frankfurt → Berlin = 578 km

Marie	km	Preis): 135
936	135 €	1): 118
2695): 118

Anna	Preis	km): 118
118 €	578	4,80 €): 118
61): 118

Abb. 23: Weitere Schülerlösung zu Level 3.

Wie die meisten SuS beginnt auch dieser Schüler seine Lösung mit der Notiz von Annas und Marias Strecke. Er berechnet dann die jeweiligen Streckenlängen. Seine mathematische Idee besteht darin, Zuordnungen für Annas und Marias Strecken herzustellen. Durch diesen Schritt des Mathematisierens und dem Übergang zur mathematischen Welt erreicht er Level 3. Er geht bei beiden Mädchen von einer proportionalen Zuordnung aus und berechnet die Kilometerpreise. Mit den beiden berechneten Werten kann er Marias Ticket mit Annas Ticket vergleichen. Doch auch wenn er ein Ergebnis bei dieser Berechnung erhält, begründet er damit noch nicht wie der Preisgenerator funktioniert. Wie auch die beiden anderen Schüler diesen Levels, hat auch er ein mathematisches Zwischenergebnis, kann aber kein Endergebnis liefern, weshalb er auch nicht als Level 4 deklariert werden kann.

Level 4

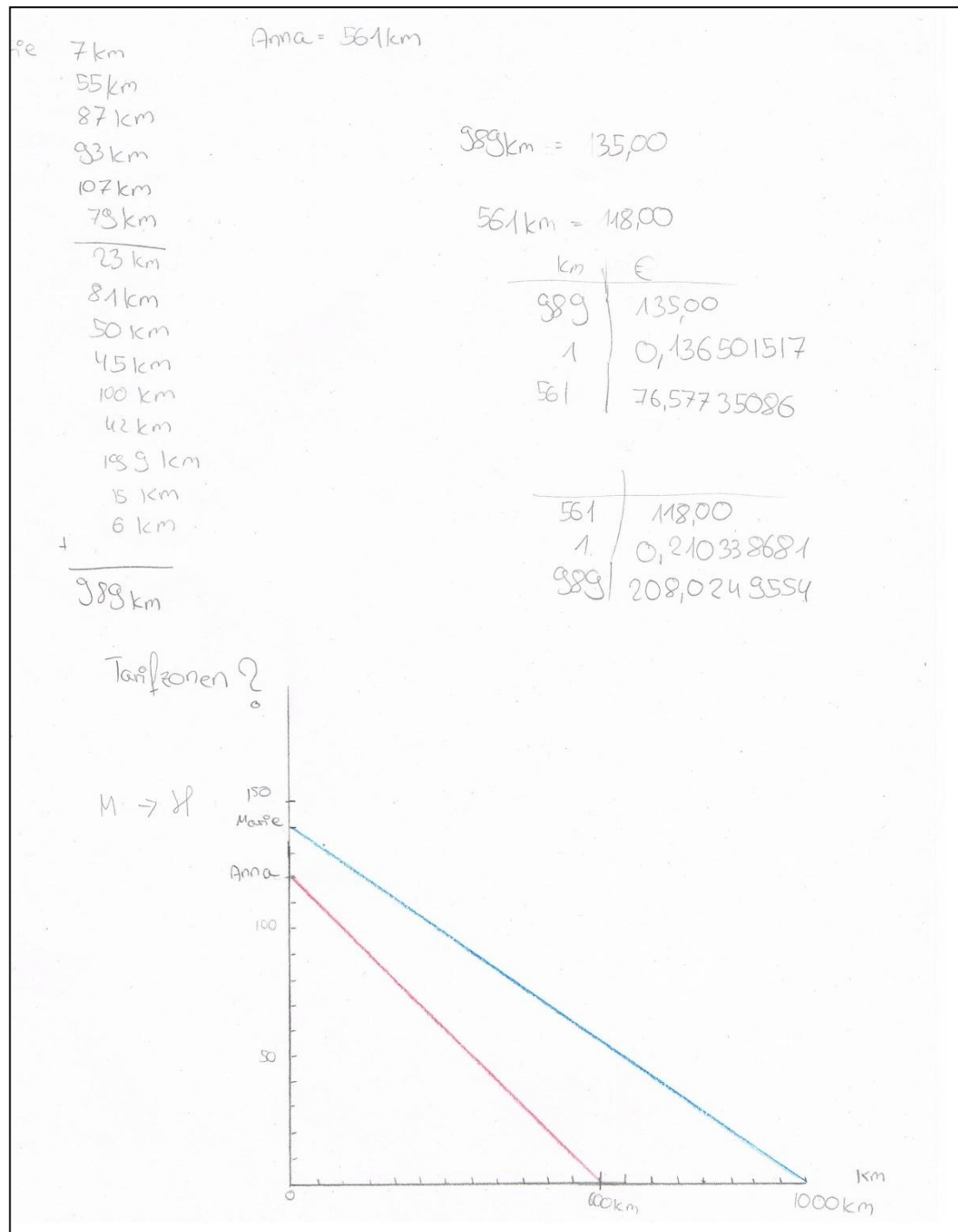


Abb. 24: Schülerlösung zu Level 4.

Bei dieser Lösung ist sehr schön zu erkennen, wie die Schülerin schrittweise mathematisch arbeitet. Der erste Schritt besteht darin, die Gesamtstrecken der beiden Reisenden zu bestimmen. An dieser Stelle unterläuft ihr ein Rechenfehler. Da sie mit diesem Fehler weiterrechnet, ist davon auszugehen, dass sie ihr Ergebnis nicht validiert hat, da er ihr sonst sicher aufgefallen wäre. Daher kann sie nicht in Level 5

eingestuft werden. Weiterhin erstellt sie zwei Tabellen, mit denen sie für beide Tickets den Preis pro Kilometer bestimmt. Hier erkennt sie, dass die Angaben unterschiedlich sind. Auch ohne ihren Rechenfehler wäre dies der Fall. Zusätzlich berechnet sie, wie viel Marias Strecke kosten würde, wenn Annas Kilometerpreis dafür verwendet werden würde, und umgekehrt. An den Ergebnissen ist zu erkennen, dass die neuen Preise wesentlich niedriger sind als die Ausgangspreise. Ausgehend davon versucht die Schülerin, die beiden Tickets auch optisch zu vergleichen. Dafür erstellt sie ein Koordinatensystem. In dieses trägt sie die Preisentwicklung beider Tickets ein. Sie geht von einer Linearität bei beiden Tickets aus, dessen Graphen aber auf verschiedenen Steigungen beruhen. Sie kommt damit zu dem Ergebnis, dass sich beide Preise unterschiedlich entwickeln müssen. Würden sich die Ticketpreise ähnlich entwickeln, hätten die Geraden die gleiche Steigung und wären parallel. Das ist vermutlich die Erkenntnis, die die Schülerin aus der Aufgabe zieht. Sie weist ein mathematisches Ergebnis vor, welches graphisch darstellt, wie die Preise bestimmt werden. Mit diesem konkreten Endergebnis erreicht sie Level 4. Allerdings macht sie den Fehler, die Tickets getrennt voneinander zu betrachten. Es wäre besser gewesen, sie hätte die Werte der Mädchen nicht als Geraden visualisiert, sondern als Punkte in dem Koordinatensystem. Dann hätte sie auch weitere Punkte für weitere Strecken einzeichnen und eine allgemeine Entwicklung beschreiben können. So wie sie es getan hat, beschreibt sie nur die individuellen Ticketpreise, ohne eine allgemeingültige Aussage darüber zu treffen, wie andere beliebige Streckenpreise bestimmt werden. Aufgrund dieser fehlenden allgemeinen Überprüfung kann sie nicht als Level 5 deklariert werden.

Level 4

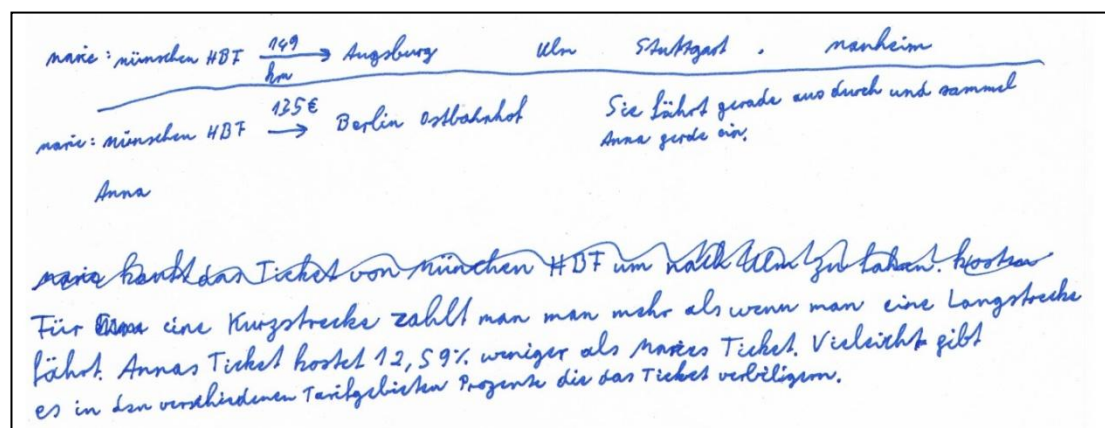


Abb. 25: Weitere Schülerlösung zu Level 4.

Bei dieser Lösung spielt die Streckenlänge keine Rolle. Der Schüler argumentiert ausschließlich über den Preis. Er nennt Annas Strecke eine Kurzstrecke, da sie verglichen mit Maries Strecke die kürzere ist. Er nutzt die Information, dass der Preisunterschied der Tickets 17€ beträgt. Das lässt ihn die Annahme treffen, dass Annas Ticket 12,59% billiger ist. Denn 17€ von 135€ entsprechen einem Anteil von 12,59%. Er weist damit ein konkretes mathematisches Ergebnis vor, welches die Zuordnung zu Level 4 rechtfertigt. Er versucht sein Ergebnis zu verallgemeinern, indem er annimmt, verschiedene Tarifgebiete hätten bestimmte Prozente auf die Ticketpreise. Und für das Gebiet, welches Anna mit ihrem Ticket abdeckt, beträgt der Prozentsatz nun mal 12,59%. Er verallgemeinert sein Ergebnis dahingehend, dass er angibt, für diese konkrete Aufgabe hätte er ein Ergebnis ermittelt und für andere Gebiete gelten ebenso spezielle Prozentsätze, die er aber natürlich nicht kennen kann. Damit gelingt ihm die Verallgemeinerung aber nicht völlig, da er keine Vergleichswerte heranziehen kann. Aus diesem Grund fehlt ihm die Validierung seines Ergebnisses, weshalb er nicht Level 5 erreicht.

Level 5

<p>Marie: 135 € = <u>1029 km</u></p> <p style="margin-left: 40px;">7. 135 €</p> <p style="margin-left: 40px;">55</p> <p style="margin-left: 40px;">87</p> <p style="margin-left: 40px;">93 1029 km</p> <p style="margin-left: 40px;">107</p> <p style="margin-left: 40px;">79</p> <p style="margin-left: 40px;">23</p> <p style="margin-left: 40px;">81</p> <p style="margin-left: 40px;">90</p> <p style="margin-left: 40px;">45</p> <p style="margin-left: 40px;">100</p> <p style="margin-left: 40px;">42</p> <p style="margin-left: 40px;">199</p> <p style="margin-left: 40px;">15</p> <p style="margin-left: 40px;"><u>766</u></p> <p style="margin-left: 40px;">1029</p>	<p>Septu Anna: 118€ - <u>601 km</u></p> <p style="margin-left: 40px;">23 118€</p> <p style="margin-left: 40px;">81</p> <p style="margin-left: 40px;">90</p> <p style="margin-left: 40px;">45</p> <p style="margin-left: 40px;">100</p> <p style="margin-left: 40px;">42</p> <p style="margin-left: 40px;">199</p> <p style="margin-left: 40px;">15</p> <p style="margin-left: 40px;"><u>436</u></p> <p style="margin-left: 40px;">601</p> <p style="margin-left: 40px;">601</p>
-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Beispiel:

Augsburg Hbf - Ulm Hbf	<u>87 km</u>
	23 €
Frankfurt (Main) Hbf - Hanau Hbf	<u>23 km</u>
	13 €

Bei dem Beispiel ist zu sehen, dass wieder über ~~da~~ die doppelt so lange Strecke trotzdem nur 10€ mehr kostet.

Abb. 26: Schülerlösung zu Level 5.

Diese Lösung ist eine von dreien, welche das höchste Level in dieser Studie erreicht haben. Beschrieben wurde diese Lösung bereits bei Lösungsweg 4. Die Schülerin hat die Aufgabe verstanden und Informationen strukturiert, indem sie insgesamt vier Streckenlängen und Preise paarweise notiert hat. Außerdem hat sie fehlende Angaben berechnet und kann damit ein mathematisches Ergebnis vorweisen. Level 5 erreicht sie dadurch, indem sie die Vermutung, lange Strecken kosten nicht immer vergleichsweise mehr, durch ausgewählte Beispiele überprüft und bestätigt. Sie stellt zwar keine Formel oder ähnliches auf, die beschreibt, wie viel teurer das Ticket bei einer bestimmten Strecke ist. Aber sie formuliert eine konkrete Antwort, in der sie

aussagt, dass längere Strecken nicht überaus teuer sind. Und diese Vermutung hat sie durch ein konkretes weiteres Wertepaar bestätigt. Es kann also gesagt werden, dass die Schülerin ihr Ergebnis anhand eines weiteren Beispiels überprüft und auf die reale Welt rückkoppelt, wodurch sie Level 5 zugeteilt werden kann. Es kann aber kritisiert werden, dass die vorliegenden Vergleichsbeispiele nicht ausreichen. Es wäre besser gewesen, wenn sie mehrere Vergleiche herangezogen hätte, da es sich sicher auch einige Beispiele gibt, die ihrer Vermutung widersprechen. Ihre Ergebnisüberprüfung hätte dadurch noch kritischer sein können. Nichtsdestotrotz erreicht sie Level 5.

Level 6: Dieses Level wurde von keinem der 134 SuS erreicht. Dies kann verschiedene Gründe haben. Es könnte beispielsweise daran liegen, dass die SuS mit dem Aufgabentyp vorher noch nicht vertraut waren. Sie wussten also nicht, was von ihnen verlangt wird und dass es Teil der Lösung ist, das Ergebnis im letzten Schritt zu vermitteln. Es könnte aber auch daran liegen, dass den SuS die Zeit dazu fehlte. Sie waren in 45 Minuten vielleicht nur dazu in der Lage, die Aufgabe mathematisch zu lösen und hatten darüber hinaus nicht genug Zeit, das Ergebnis zu überprüfen oder gar zu vermitteln. Weitere Gründe werden unter „Kognitive Hürden“ näher thematisiert.

4.2.2 Auswertung der erreichten Level

Tabelle 5: Gesamtübersicht über die Verteilung der Kriterien und Level.

	Schule				Geschlecht					Klassenstufe				Alter								Gesamt						
	A		B		m		w		o.A.		Klasse 9		Klasse 10		13 Jahre		14 Jahre		15 Jahre		16 Jahre			17 Jahre		o.A.		
	rel.	abs.	rel.	abs.	rel.	abs.	rel.	abs.	rel.	abs.	rel.	abs.	rel.	abs.	rel.	abs.	rel.	abs.	rel.	abs.	rel.	abs.	rel.	abs.	rel.	abs.	rel.	abs.
Level 0	2	20%	8	80%	10	100%	0	0%	0	0%	6	60%	4	40%	0	0%	2	20%	2	20%	5	50%	1	10%	0	0%	10	7,5%
Level 1	2	29%	5	71%	1	14%	6	86%	0	0%	3	43%	4	57%	0	0%	0	0%	4	57%	3	43%	0	0%	0	0%	7	5,2%
Level 2	4	29%	10	71%	5	36%	8	57%	1	7%	4	29%	10	71%	0	0%	2	14%	3	21%	5	36%	3	21%	1	7%	14	10,4%
Level 3	22	30%	51	70%	38	52%	33	45%	2	3%	26	36%	47	64%	2	3%	10	14%	37	51%	20	27%	2	3%	2	3%	73	54,5%
Level 4	5	19%	22	81%	13	48%	14	52%	0	0%	14	52%	13	48%	0	0%	11	41%	9	33%	6	22%	1	4%	0	0%	27	20,1%
Level 5	3	100%	0	0%	1	33%	2	67%	0	0%	0	0%	3	100%	0	0%	0	0%	2	67%	0	0%	1	33%	0	0%	3	2,2%
Level 6	0	0%	0	0%	0	0%	0	0%	0	0%	0	0%	0	0%	0	0%	0	0%	0	0%	0	0%	0	0%	0	0%	0	0,0%
Gesamt	38	28%	96	72%	68	51%	63	47%	3	2%	53	40%	81	60%	2	1%	25	19%	57	43%	39	29%	8	6%	3	2%	134	100,0%

Nun wird eine Übersicht über die erreichten Level und dessen Verteilung gegeben. Dabei soll zunächst herausgefunden werden, welche Level wie häufig erreicht wurden. Parallel wird diskutiert, wie diese Verteilung verbessert werden könnte. Im Anschluss daran wird untersucht, ob es zwischen dem Alter, Geschlecht, der Klassenstufe und Schule Unterschiede gibt.

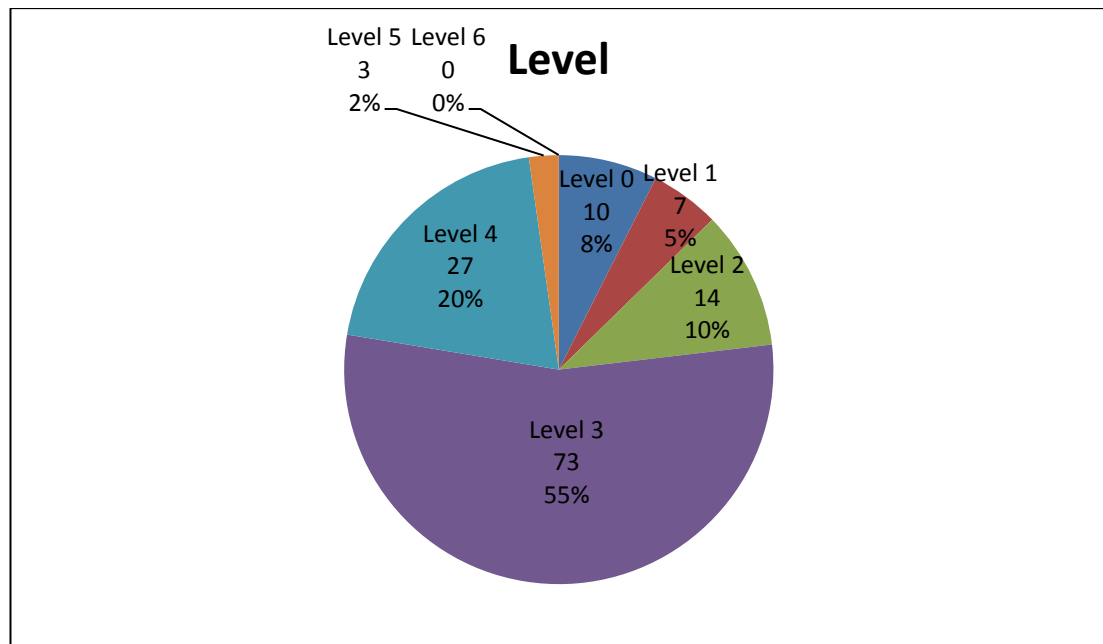


Diagramm 8: Verteilung der Level.

In diesem Diagramm ist die Verteilung der Level in relativen Angaben und mit absoluten Werten abzulesen. Was als erstes deutlich auffällt, ist die Dominanz des dritten Levels. Dieses wurde von 55% aller SuS erreicht. D.h. mehr als die Hälfte der SuS ist in der Lage, die Aufgabe zu mathematisieren. Sie können mathematische Ansätze vorweisen, die aber noch keine konkreten Endergebnisse liefern. Dass diese Stufe so zahlreich erreicht wurde, ist sehr positiv. Es zeigt nämlich, dass die SuS nicht überfordert waren und zumindest eine Vorstellung davon hatten, wie sie an das Problem herangehen könnten. Es ist weiteren 22% der SuS gelungen, ein höheres Level zu erreichen (Level 4 oder Level 5). Etwa 20% haben ein mathematisches Ergebnis erhalten (Level 4) und 2% haben ihre Lösung sogar validiert (Level 5). Allerdings hat es kein Schüler geschafft, sein Ergebnis zu vermitteln, was der letzte Schritt im Modellierungskreislauf gewesen wäre. Generell kann aber gesagt werden, dass etwa drei Viertel aller SuS (Level 3, Level 4 und Level 5) mathematisch gearbeitet und Teilergebnisse oder sogar Endergebnisse erhalten hat. Wenn davon ausgegangen wird, dass Modellierungsaufgaben noch nicht vollständig an Schulen etabliert sind, ist dieses Ergebnis zufriedenstellend. Denn an der einen Schule, die an dieser Studie beteiligt ist, wurde bisher noch nicht mit solchen Aufgaben gearbeitet. An der anderen Schule finden Lehrerfortbildungen statt, bei denen das mathematische Modellieren thematisiert wird. Aufgaben dieser Aufgabenkultur wurden aber auch hier noch nicht in den Mathematikunterricht eingeführt.

Modellieren scheint also Einzug in die Schulen zu finden, allerdings scheinbar noch immer recht langsam. Aus diesem Grund kann gesagt werden, dass das Ergebnis der erreichten Level zufriedenstellend ist. Etwa 10% der SuS waren immerhin in der Lage, Informationen herauszufiltern und diese so zu strukturieren, dass zu erkennen ist, dass sie die Aufgabe verstanden haben, ihnen aber noch der nötige Hinweis fehlt, um die Aufgabe mit den vorliegenden Informationen zu lösen (Level 2). Würden (mehr) Modellierungsaufgaben an den Schulen durchgeführt werden, würden auch diese SuS mit der Zeit sicher lernen, bei ganz unterschiedlichen Aufgaben die passenden mathematischen Operationen auszuwählen. Vermutlich müssen sie zunächst erkennen, dass Mathematik auch anders funktioniert, als vorhandene Formeln zu verwenden und nur bekannte Algorithmen anzuwenden. Sie müssen erkennen, wie alltägliche und auch komplexe Probleme auf unterschiedliche Weisen gelöst werden können. Und das nicht nur mit Hilfe des gerade neu erlernten Wissens, sondern mit allen mathematischen Operationen, die den SuS zur Verfügung stehen. Etwas enttäuschend sind die 5% der SuS, die mit der Aufgabe nicht viel anfangen konnten (Level 1). Sie scheinen sie prinzipiell zwar verstanden zu haben, sind aber zu keinem weiteren Schritt in der Lage. Weitere 10% haben nicht mal Level 1 erreicht und konnten nur als Level 0 deklariert werden. Das kann natürlich viele Gründe haben, die nicht nur darauf zurückzuführen sind, dass die SuS die Aufgabe nicht verstanden haben. Demotivation beispielsweise kann auch eine große Rolle spielen¹⁶.

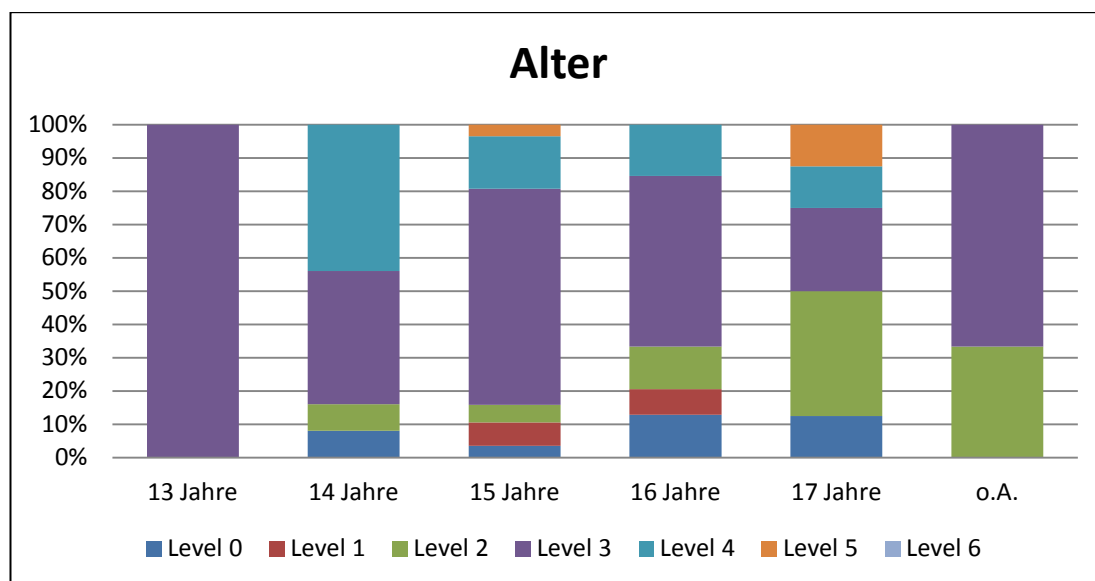
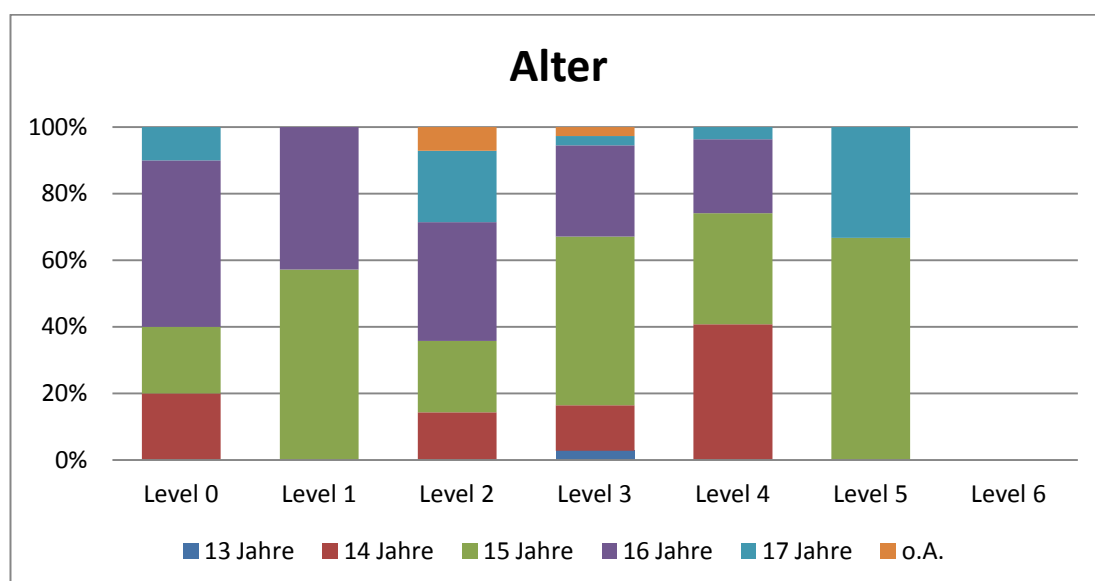
Dennoch sollte es Ziel der Lehrenden sein, auch diese SuS zu erreichen und ihnen Modellierungsaufgaben nahezu legen. Schließlich sind diese Art von Aufgaben nicht nur Aufgaben, die SuS lösen, um gute Noten zu bekommen. Sie bieten auch die Möglichkeit, Angelegenheiten aus der realen Welt mathematisch zu lösen, was den SuS im Alltag sicher oft nützlich sein kann. Außerdem muss der Lehrende seine SuS auch allgemein mit dem Aufgabentyp vertraut machen und ihnen schrittweise Hilfestellungen anbieten. Nur dann ist es möglich, bessere Resultate zu erzielen und somit auch höhere Level zu erreichen. Durch gezielte Vorbereitung und häufigere Durchführung von Modellierungsaufgaben können langfristig also mit Sicherheit höhere Level erzielt und bessere Leistungen erbracht werden.

Nun soll untersucht werden, wie die Verteilungen der Level bei dem Alter, Geschlecht, der Klassenstufe und Schule aussehen.

¹⁶ Mehr dazu im Abschnitt „Kognitive Hürden“.

*Alter***Tabelle 6: Übersicht über die Verteilung des Alters auf die Level.**

Alter	Level 0	Level 1	Level 2	Level 3	Level 4	Level 5	Level 6	Gesamt
13 Jahre	0	0	0	2	0	0	0	2
14 Jahre	2	0	2	10	11	0	0	25
15 Jahre	2	4	3	37	9	2	0	57
16 Jahre	5	3	5	20	6	0	0	39
17 Jahre	1	0	3	2	1	1	0	8
o.A.	0	0	1	2	0	0	0	3
Gesamt	10	7	14	73	27	3	0	134

**Diagramm 9: Verteilung der Level auf das Alter.****Diagramm 10: Verteilung des Alters auf die Level.**

Von den 134 SuS sind zwei in dem Alter von 13 Jahren. Beide haben Level 3 erreicht. Da sie aber nur etwa 1,5% der Gesamtbeteiligung ausmachen, ist dieses Ergebnis wenig aussagekräftig.

Interessanter wird es bei den 25 SuS, die 14 Jahre alt sind. Fast gleich viele von ihnen haben Level 3 und Level 4 erreicht. Nur zwei SuS haben jeweils Level 0 und Level 2 erlangt. Zudem sind es die 14-jährigen SuS, die den größten Anteil des vierten Levels ausmachen. Etwa 40,7% aller SuS des vierten Levels sind 14 Jahre alt. Bei den 15-jährigen SuS fällt sofort auf, dass der Großteil, nämlich 64,9% und damit weit über die Hälfte dieser Altersgruppe, Level 3 zuzuweisen ist. Es folgt Level 4 mit ca. 15,8% der 15-jährigen. Die übrigen SuS verteilen sich gleichmäßig auf Level 0, Level 1, Level 2 und Level 5.

Auch bei den 16-jährigen SuS besteht der Großteil aus Lernenden, die Level 3 erreicht haben. Interessant ist, dass fast genauso viele SuS Level 4 erreicht haben wie Level 0. Bei dieser Altersgruppe ist die Bandbreite damit recht groß. Denn fünf SuS haben keine Leistung zu Papier bringen können, während sechs SuS sogar ein konkretes Ergebnis liefern konnten und damit zu den SuS gehören, die das zweit höchste vorkommende Level erreichen.

Nur acht SuS sind 17 Jahre alt. Sie verteilen sich fast gleichmäßig auf Level 0, Level 2, Level 3, Level 4 und Level 5.

Insgesamt kann erfasst werden, dass Level 3 in jeder Altersstufe einen beachtlichen Anteil einnimmt. Level 4 ist bei den 14-jährigen am häufigsten vorhanden. Level 5 wurde nur von einem 15-jährigen und von zwei 17-jährigen SuS erreicht. Dadurch gewinnt vor allem die Gruppe der 14-jährigen SuS an Aufmerksamkeit, da sie bei der Problemlösung recht weit gekommen sind (gemessen an der Höhe des Levels, das sie erreicht haben). Ebenfalls sind die 15-jährigen zu betrachten, die das Vorkommen bei Level 3 dominieren und außerdem vereinzelt Level 5 erreichen. Diese beiden Altersgruppen bilden damit eine Gruppe von SuS, die Level 3 und Level 4 am häufigsten erreicht haben. Aussagekräftige Unterschiede sind zwischen den Altersgruppen aber nicht auszumachen. Erklärende Gründe dafür gibt es nicht. Entwicklungspädagogisch gesehen finden keine tiefgreifenden Ereignisse statt, die bessere mathematische Leistungen erbringen. Daher kann es sein, dass das Alter von 14 bzw. 15 Jahren rein zufällig bei dieser Studie den hohen Leveln zugeordnet werden kann.

Geschlecht

Tabelle 7: Übersicht über die Verteilung des Geschlechts auf die Level.

Geschlecht	Level 0	Level 1	Level 2	Level 3	Level 4	Level 5	Level 6	Gesamt
m	10	1	5	38	13	1	0	68
w	0	6	8	33	14	2	0	63
o.A.	0	0	1	2	0	0	0	3
Gesamt	10	7	14	73	27	3	0	134

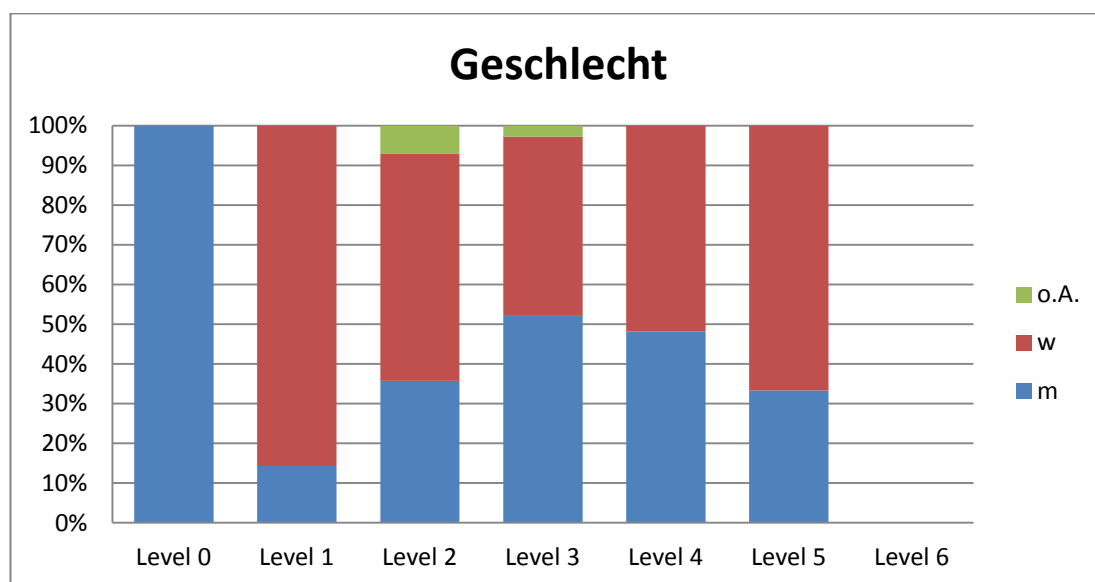


Diagramm 11: Verteilung des Geschlechts auf die Level.

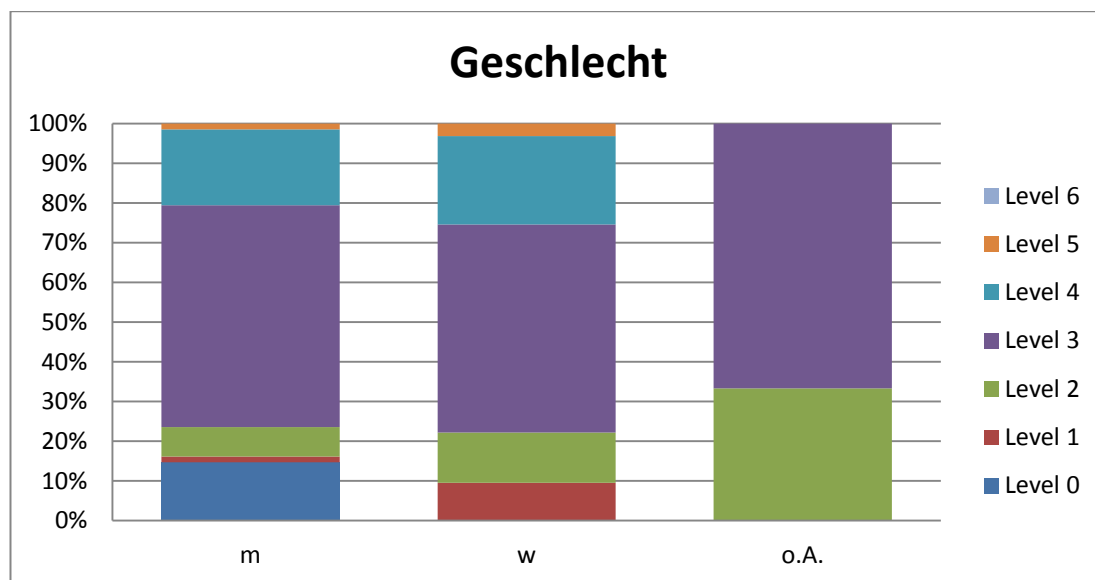


Diagramm 12: Verteilung der Level auf die Geschlechter.

Diese Diagramme zeigen, wie die Geschlechter auf die einzelnen Level verteilt sind. Level 0 wird vollständig von männlichen Schülern eingenommen. Bei Level 3 und Level 4 sind die Anteile etwa gleich. Die Mädchen überwiegen deutlich bei Level 1

und knapp bei Level 5. Zwischen den Geschlechtern ist bezüglich der Level kein kennzeichnender Unterschied festzumachen. Es scheint aber, als entwickelten sich die Level der Geschlechter genau entgegengesetzt. Mit Ausnahme von Level 0 beginnen die Jungen niedrig bei Level 1, steigern sich bis zu Level 3 und fallen dann wieder ab. Die Mädchen hingegen beginnen mit einem relativ hohen Anteil bei Level 1, nehmen auf dem Weg zu Level 3 etwas ab, steigen aber wieder bei Level 4 und Level 5 an. Der größte Unterschied besteht wohl darin, dass kein Mädchen Level 0 zugewiesen wird. Entscheidende Gründe dafür können nicht genannt werden. Es kann nur gemutmaßt werden, dass Mädchen eher die Motivation in sich tragen, sich diesem ihnen unbekanntem Aufgabentypen zu stellen. Denn auch wenn sie die Aufgabe nicht sofort mathematisch erfassen können, probieren sie sich zumindest an einem Lösungsansatz und erreichen damit mindestens Level 1, während Jungen schneller aufzugeben scheinen.

Klassenstufe

Tabelle 8: Übersicht über die Verteilung der Klassenstufen auf die Level.

Klassenstufe	Level 0	Level 1	Level 2	Level 3	Level 4	Level 5	Level 6	Gesamt
Klasse 9	6	3	4	26	14	0	0	53
Klasse 10	4	4	10	47	13	3	0	81
Gesamt	10	7	14	73	27	3	0	134

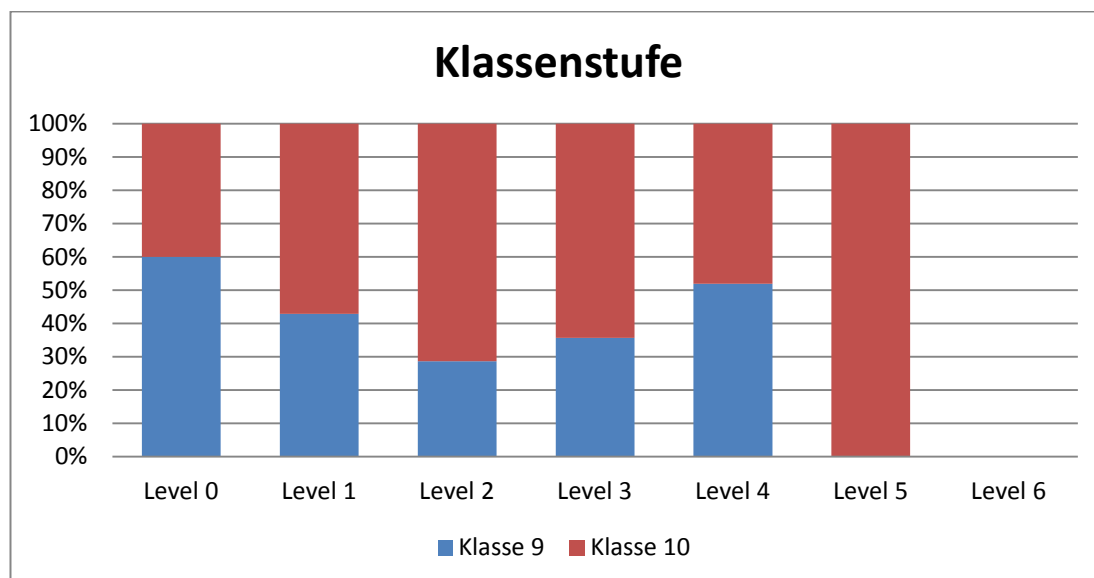


Diagramm 13: Verteilung der Klassenstufen auf die Level.

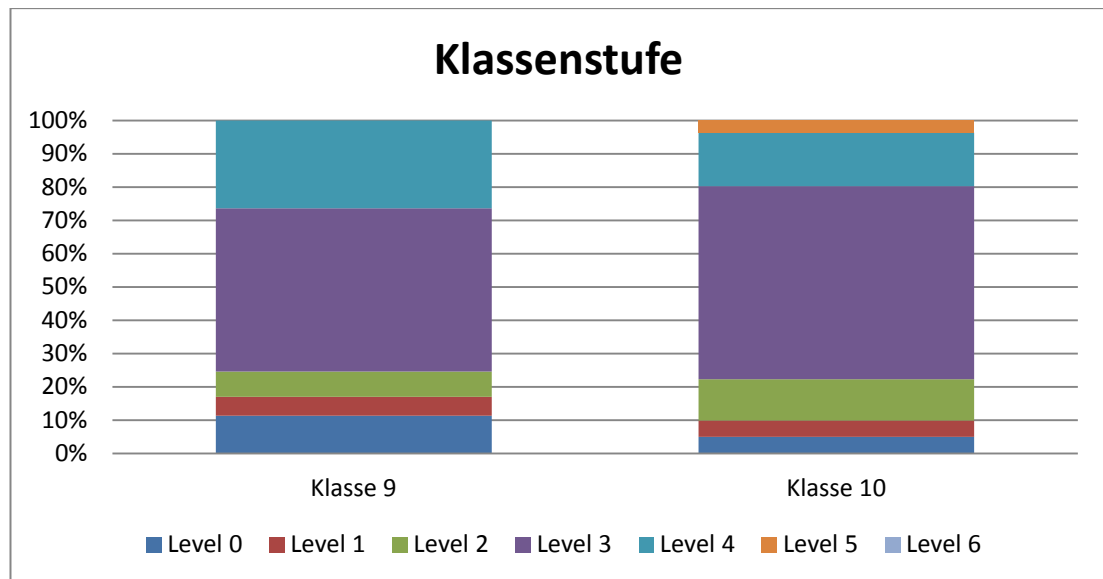


Diagramm 14: Verteilung der Level auf die Klassenstufen.

An diesen Diagrammen fällt als erstes auf, dass das höchste erreichte Level nur von Schülern der zehnten Jahrgangsstufe erreicht wurde (Level 5). Allerdings sind das auch nur drei SuS. Bei den übrigen Levels kann ein parabelförmiger Trend ausgemacht werden. Level 0 wird zu 60% von der neunten und zu 40% von der zehnten Klasse erreicht. Bei Level 1 sinkt der Anteil der neunten Klasse auf ca. 43% und der Anteil der zehnten Klassen steigt dafür auf etwa 57%. Auf etwa 29% sinkt der Anteil der neunten Jahrgangsstufe weiter bei Level 2. Im Gegenzug steigt der Wert für die zehnte Stufe auf 71%. Das Blatt wendet sich ab Level 3 wieder. Hier bestimmen die neunten Klassen einen Anteil von 36% und die zehnten Klassen 64%. Dieser Trend führt sich in Level 4 fort, bei dem die neunte Jahrgangsstufe einen Anteil von 52% ausmacht und die zehnte Klasse 48% einnimmt. Es kann keine Klasse festgemacht werden, die herausragend besser abgeschnitten hätte. Anfangs scheint es, als würde die zehnte Klasse die höheren Level dominieren. Doch ab Level 3 steigt der Anteil der neunten Klassen etwas an. Level 5 wird dagegen komplett von der zehnten Klasse eingenommen. Das Bild ist also etwas durchwachsen und es können keine aussagekräftigen Unterschiede ausgemacht werden, da sich die Anteile der hohen und niedrigen Level beinahe gleichmäßig auf die Klassenstufen verteilen.

Schule

Tabelle 9: Übersicht über die Verteilung der Schulen auf die Level.

Schule	Level 0	Level 1	Level 2	Level 3	Level 4	Level 5	Level 6
B	8	5	10	51	22	0	0
A	2	2	4	22	5	3	0

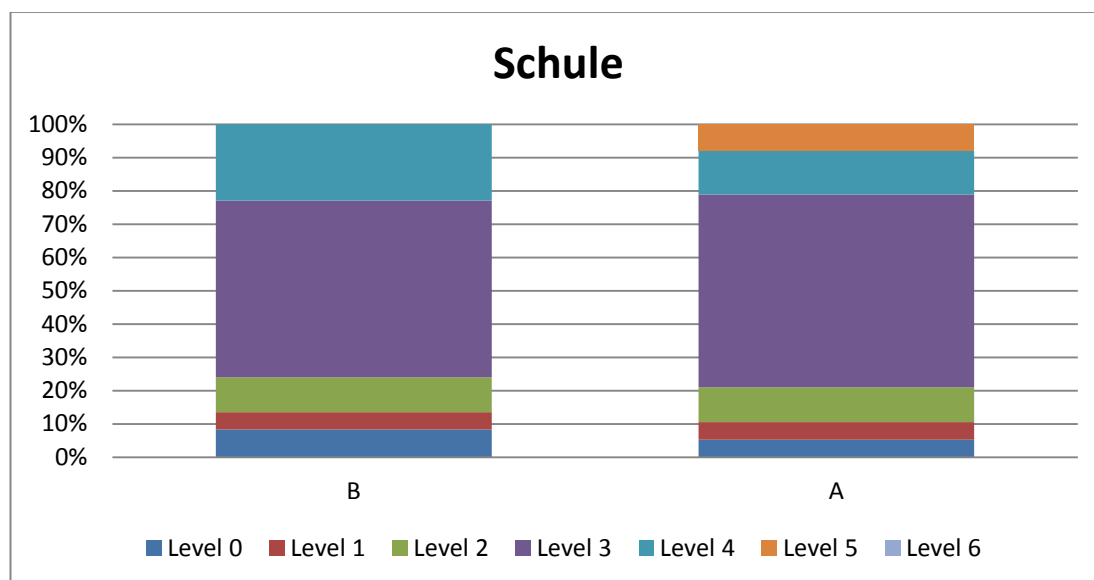


Diagramm 15: Verteilung der Level auf die Schulen.

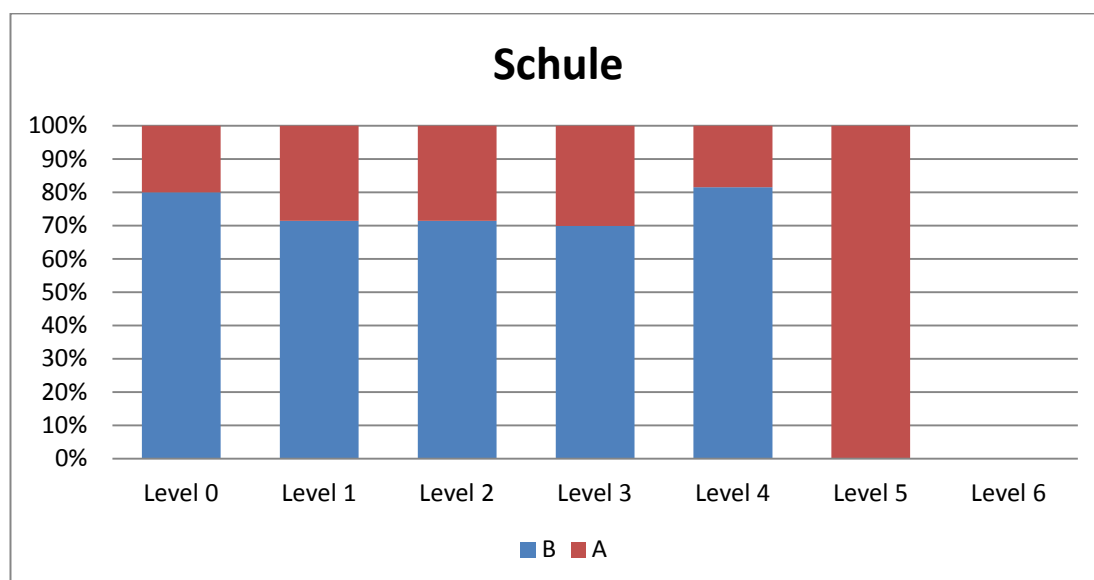


Diagramm 16: Verteilung der Schulen auf die Level.

Zwischen den Schulen bestehen keine überragenden Differenzen. Schule A konnte zum Zeitpunkt der Durchführung keine Erfahrungen mit Modellierungsaufgaben vorweisen. Schule B, so eine Lehrerin, bilde sich derzeit auf diesem Gebiet weiter

und nehme an Fortbildungen statt. Modellierungsaufgaben seien aber bisher noch nicht in den Mathematikunterricht eingebettet worden. Schaut man sich die Verteilung der Level an, so ist zu erkennen, dass Schule A vergleichsweise höhere Level erreicht. In relativen Angaben überwiegt die Schule B natürlich, da sie etwa 72% der gesamten Schüleranzahl bestimmt. Aus diesem Grund ist für den Vergleich die Entwicklung der absoluten Werte ausschlaggebend. Dadurch scheint es, als erreiche Schule A vergleichsweise höhere Level als Schule B. Zudem wird Level 5 nur von SuS der Schule A gemeistert. SuS der Schule B erreichen maximal Level 4. Der Anlass für die etwas höheren Level der SuS von Schule A kann darin begründet sein, dass sie vielleicht einen besseren Bezug zu der Aufgabe herstellen konnten. Vielleicht hatten diese SuS schon Erfahrungen mit der Deutschen Bahn, mit Vergleichen von Tarifen oder Ähnlichem und konnten deshalb schneller mit der Lösung der Aufgabe beginnen. Denn wenn die SuS keinen Bezug zur Aufgabe herstellen können, fällt es ihnen schwer, das Problem zu bewerkstelligen. Daher kann gesagt werden, dass die Schule A in dieser Studie zwar höhere Level erreicht hat, aber dass dies nicht allgemein bedeutet, dass ihre Modellierungskompetenz deshalb besser ist, da sehr viele Faktoren für die Bearbeitung der Aufgabe verantwortlich sind (Vorwissen, Bezug zur Aufgabe, usw.) .

4.3 Kognitive Hürden

Dieser Teil der Studie beschäftigt sich mit den Schwierigkeiten der SuS bei der Lösung der Modellierungsaufgabe. Es wird untersucht, wo kognitive Hürden festzustellen sind und diskutiert, wieso sie dort entstanden sein könnten.

Kognitive Hürden oder auch allgemeine Schülerschwierigkeiten bilden einen zentralen Teil dieser Studie. Denn neben der Untersuchung der Lösungsansätze und Level ist es interessant zu ermitteln, wo SuS Schwierigkeiten hatten und weshalb sie dort aufgetreten sind. Hindernisse seitens der Lernenden zu untersuchen ist äußerst wichtig, um ihre Leistungen verbessern zu können. Denn nur wenn rausgefunden wird, wo und warum SuS Schwierigkeiten haben, kann an diesen Dingen gearbeitet und eine Verbesserung der Leistungen angestrebt werden.

Bevor es zur Erschließung der kognitiven Hürden kommt, soll nochmal betont werden, dass nur die Lösungsblätter der SuS ausgewertet wurden. Die SuS waren sich dessen bewusst und durften Rückseiten oder eigene Blätter für Notizen nutzen, welche nicht in die Auswertung mit einbezogen wurden. Dies kann einen erheblichen

Nachteil für einzelne SuS bedeuten, wenn diese mehr Zeit als nötig für solche Notizen verwendet haben. Es kann daher sein, dass einzelne SuS ungerechtfertigt einem eher niedrigeren Level zugeteilt wurden, obwohl sie vielleicht auf Zusatzblättern richtige Informationen notiert haben, die ein höheres Level bedeutet hätten, diese aber nicht mehr auf das Lösungsblatt übertragen haben. Daher muss bei der Ausarbeitung der Schülerschwierigkeiten mit bedacht werden, dass manche SuS vielleicht zu viel Zeit an Notizen verbracht haben oder brauchbare Informationen nicht übertragen haben. Doch es kann nur das ausgewertet werden, was auf den Lösungsblättern notiert wurde. Und da alle SuS dieselben Voraussetzungen hatten, müssen solche Faktoren zwar bedacht werden, können aber in der Auswertung selbst nicht berücksichtigt werden.

Für die Ausarbeitung der Schülerschwierigkeiten wird zunächst geprüft, welcher Lösungsweg welche Level beinhaltet. Anhand dessen soll erkannt werden, ob es einen Lösungsweg gibt, der vor allem hohe Level aufzeigt und damit als besonders zielführend beschrieben werden kann. Hohe Level beschreiben zwar nicht zwangsläufig zielführende Ansätze, lassen dies aber (eher als mit niedrigen Leveln) vermuten. Zur Veranschaulichung folgen zwei Diagramme, die von jedem Lösungsweg die entsprechenden Level darstellen.

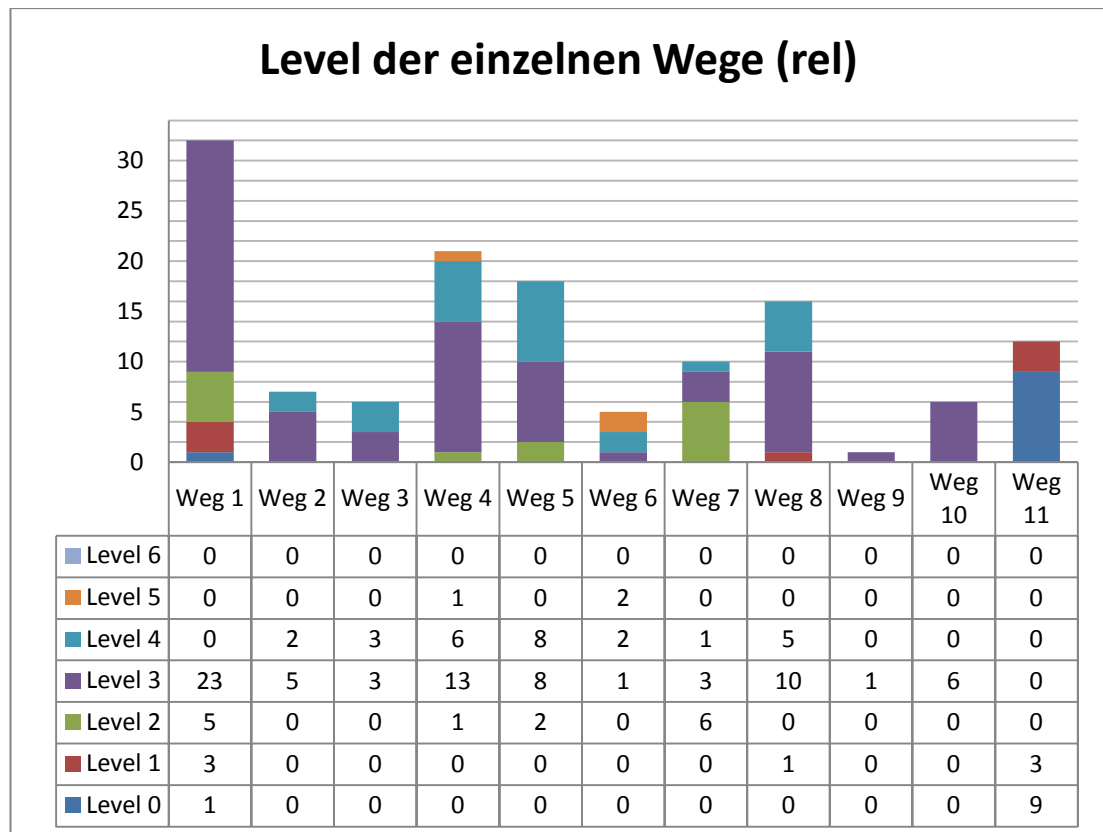


Diagramm 17: Verteilung der Level auf die Lösungsweg in relativen Angaben.

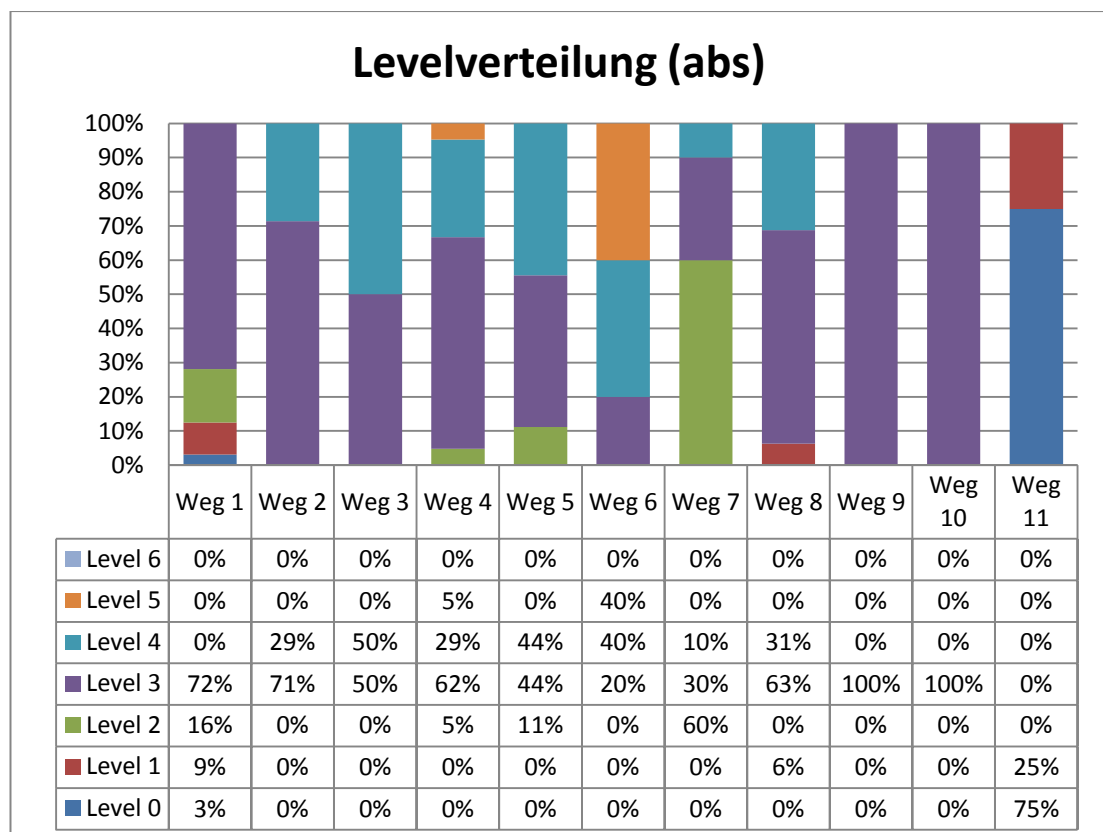


Diagramm 18: Verteilung der Level auf die Lösungswege in absoluten Angaben.

Das erste Diagramm gibt die relativen Angaben der Verteilung der Level auf die Lösungswege an. Dadurch entsteht ein Überblick darüber, wie die allgemeine Level-Lösungsweg-Verteilung aussieht. Zusätzlich wird für jeden einzelnen Weg veranschaulicht, welche Level zu welchem Anteil mit ihm erreicht werden.

Das zweite Diagramm verwendet die absoluten Werte. Daran kann die Verteilung der Anteile der Level pro Lösungsweg näher untersucht werden.

Lösungsweg 1 ist der am häufigsten gewählte Lösungsansatz. Fast drei Viertel der SuS erreichen dabei Level 3. Höhere Level werden nicht erreicht. Level 2 wird von 16% der Lehrenden erreicht, 9% können Level 1 zugewiesen werden und 3% gehören Level 0 an. Der Weg über die Streckenlänge scheint damit eine Lösungsmöglichkeit zu sein, bei der sehr viele SuS eine mathematische Idee entwickeln, welche allerdings ergebnislos bleibt. Damit ergibt sich für die Studie ein großer Anteil an SuS (etwa 24% aller SuS haben diesen Lösungsweg gewählt), die trotz guten Ansatzes keine konkrete Lösung vorweisen können, was ein wenig enttäuschend ist.

Die Verteilung der Level auf Lösungsweg 2 ist da um einiges erfreulicher. Zwar wählen ihn nur sieben SuS, dafür erreichen zwei von ihnen aber Level 4 und die anderen fünf SuS erlangen Level 3. Dieser Lösungsweg wird damit also nur von einem kleinen Teil aller SuS gewählt, erreicht dafür aber vergleichsweise hohe Level. Er scheint zielführender zu sein als der erste Lösungsweg, bei dem Level 3 das höchst erreichte Level war.

Beim dritten Lösungsweg wird Level 4 noch häufiger erreicht als bei Lösungsweg 2. Genau die Hälfte dieser SuS erreichen Level 4 und die andere Hälfte gehört zu Level 3.

Für Lösungsweg 4 steigt der Trend der hohen Level weiter. Lediglich ein Schüler erreicht Level 2. Ein Großteil von 13 SuS wird als Level 3 deklariert. Auch Level 4 ist mit sechs SuS vertreten. Ein Schüler erreicht sogar Level 5. Dieser Lösungsweg bringt vergleichsweise hohe Level mit sich. Die Vorgehensweise dieses Weges scheint das Potential zu haben, gute Leistungen hervorzubringen.

Lösungsweg 5 wird zu gleichen Teilen von Level 3 und Level 4 bestimmt. Zwei SuS erreichen Level 2.

Bei Lösungsweg 6 wird der Trend nochmal positiver. Hier haben alle SuS mindestens Level 3 erreicht. Allerdings wurde dieser Weg mit einer Menge von 5 SuS auch nur am zweitseltensten gewählt. Es spricht dennoch für diesen

Lösungsansatz, dass jeweils zwei dieser SuS Level 4 und Level 5 erreicht haben. Der Weg wurde damit zwar kaum gewählt, ist aber scheinbar äußerst zielführend, da er hohe Level beinhaltet.

Bei Lösungsweg 7 sinkt der Trend wieder. Über die Hälfte der SuS hat hier nur Level 2 erreicht. Level 3 wurde von 30% der SuS erlangt, weitere 10% erreichten zumindest Level 4.

Lösungsweg 8 vergegenwärtigt gewissermaßen die Verteilung, die auch dem Gesamtbild entspricht. Etwa zwei Drittel der SuS gehören zu Level 3 und das übrige Drittel der SuS konnte Level 4 erreichen. Das bisherige Gesamtbild der Studie scheint dieser Verteilung in etwa zu entsprechen, da Level 3 das bisher wohl am häufigsten bestandene Level zu sein scheint, auf das als nächstes Level 4 folgt. Bei den folgenden Leveln ändert sich dieses Bild allerdings, im Speziellen bezüglich Level 4.

Die Verteilung für Lösungsweg 9 und Lösungsweg 10 ist identisch. Beide Wege wurden zu 100% mit Level 3 abgeschlossen. Allerdings wird Lösungsweg 9 nur von einem Schüler gewählt, während Lösungsweg 10 von sechs SuS bearbeitet wird.

Die Kategorie der unbrauchbaren Ansätze erreicht zu drei Viertel Level 0 und einem Viertel Level 1. Diese Zuweisung von niedrigen Leveln war allerdings auch absehbar, da die SuS keine verwendbaren Notizen, Kommentare oder Ähnliches notieren.

Betrachtet man die absolute Verteilung der Level auf die Lösungswege, hat es den Anschein, als seien Lösungsweg 6 und Lösungsweg 4 recht zielführend. Denn beide beschreiben vergleichsweise hohe Level. Bei Lösungsweg 6 sind am häufigsten Level 4 und Level 5 vertreten. Auch Level 3 ist bei diesem Lösungsansatz vertreten. Es beschreibt das geringste Level bei diesem Lösungsweg. Die Idee, den Preis pro Kilometer zu bestimmen, wird damit zu einem hilfreichen Ansatz. Ebenso beschreibt Lösungsweg 4 hohe Level. Hier wird sowohl mit dem Preis, als auch mit der Strecke gerechnet. 21 SuS wählen diese Herangehensweise. Auch dieser Lösungsweg kann als hilfreich bezeichnet werden, da die SuS mit ihm viele Schritte des Modellierungskreislaufes bewältigen.

Durch den Vergleich von Lösungswegen und Leveln können aber nicht nur zielführende Ansätze herausgearbeitet werden. Da in diesem Kapitel die kognitiven Hürden beschrieben werden, sollen deshalb auch Ansätze herausgearbeitet werden, die keine hohen Level erbringen. Aus den niedrigen Leveln kann nämlich geschlossen werden, dass bei diesem Ansatz entweder Schwierigkeiten aufgetreten

sind oder der Ansatz schlichtweg unsinnig ist und deshalb zu keinem hohen Level führen kann.

Lösungswege mit niedrigen Leveln sind in dieser Studie Lösungsweg 11 und gewissermaßen auch Lösungsweg 1. Lösungsweg 11 ließ dieses Ergebnis erwarten, da darin hauptsächlich die unbrauchbaren Ansätze zusammengefasst sind. Lösungsweg 1 wurde zwar zum größten Teil mit Level 3 gemeistert, jedoch kommt kein Schüler über dieses Level hinaus. Die anderen SuS erreichen lediglich Level 0, Level 1 oder Level 2. Damit scheinen bei diesem Weg Schwierigkeiten aufgetreten zu sein. Denn er wurde von allen Lösungswegen am häufigsten gewählt, wobei die SuS maximal Level 3 erreichen. Es muss also vielen SuS schwer gefallen sein, bei der Argumentation über die Streckenlänge ein mathematisches Endergebnis zu erhalten. Die SuS haben mit Level 3 zwar den Übergang in die mathematische Welt geleistet, finden sich in dieser aber wohl nur schwer zurecht und erhalten kein Ergebnis. Der Übergang von Level 3 zu Level 4 bildet damit die größte Hürde bei Lösungsweg 1.

Das folgende Diagramm zeigt ausgewählte Lösungswege mit den entsprechenden Leveln. Daran kann verglichen und veranschaulicht werden, warum Lösungsweg 6 als zielführend beschrieben werden kann und Lösungsweg 1 ernüchternde Werte liefert.

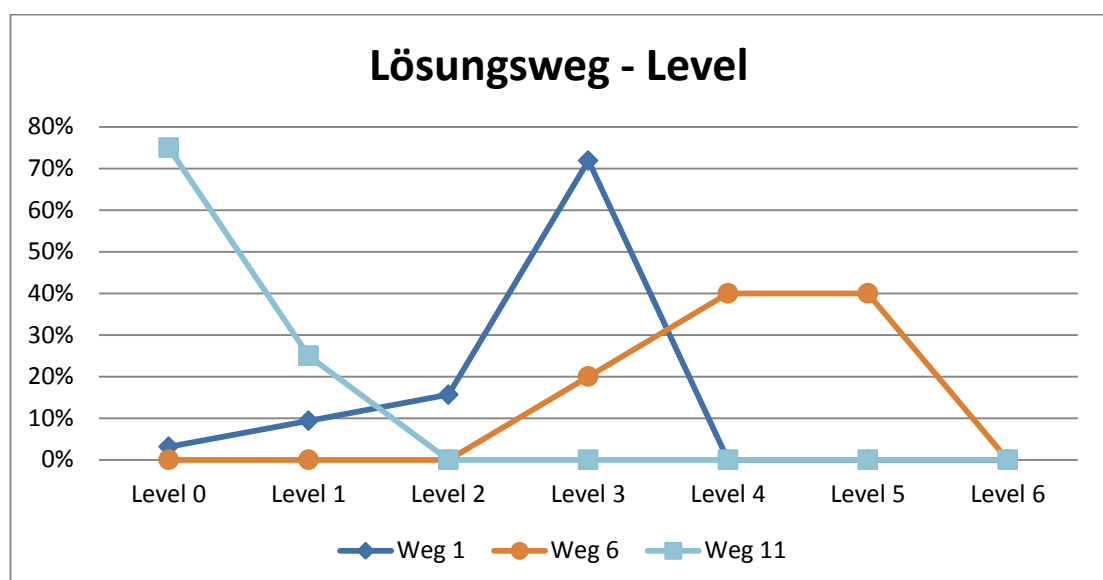


Diagramm 19: Erreichte Level von Lösungsweg 1, Lösungsweg 6 und Lösungsweg 11.

Lösungsweg 1 beschreibt die Argumentation über die Streckenlänge wurde ausgewählt, da er am häufigsten verwendet wurde. Lösungsweg 11 (die Kategorie der unbrauchbaren Ansätze) wurde ausgewählt, weil er die niedrigsten Level beinhaltet und damit einen Vergleichswert zum Lösungsweg mit den hohen Level darstellt. Lösungsweg 6 wird in der Darstellung veranschaulicht, um zu zeigen, dass er im direkten Vergleich als zielführend beschrieben werden kann.

Lösungsansatz 6 erreicht vergleichsweise hohe Level. Der Weg über den Kilometerpreis wird in dieser Studie zu dem Weg, mit dem die SuS im Modellierungskreislauf am weitesten kommen. Vermutlich ist das der Fall, weil bei der Frage nach einer Preisentwicklung schnell an Linearität oder Proportionalität gedacht wird. An dem Diagramm ist zu erkennen, dass Weg 6 verglichen mit den anderen Lösungswegen zu hohen Leveln führt. Denn er beginnt erst spät bei Level 3, wo andere Lösungswege bereits ihren Höhepunkt erreichen (vergleiche Lösungsweg 11). Während beispielsweise Lösungsweg 1 bei Level 3 das Maximum erreicht und der Trend danach fällt, beginnt Lösungsweg 6 erst bei Level 3 und steigt von dort aus weiter. Sein Trend weist damit ein hohes Potential auf, auch weiterhin zu steigen, was wiederum darauf hinweist, dass der Weg über den Kilometerpreis eine gute Lösungsmöglichkeit sein muss.

Nachdem die Lösungswege und Level gemeinsam betrachtet wurden, soll nun der Fokus auf die Level gerichtet werden. Dadurch wird ermittelt, welche Level auf Schülerschwierigkeiten hinweisen und bei welchen Teilschritten des Modellierungskreislaufes Hindernisse aufgetreten sind.

Wird die Gesamtverteilung der Level betrachtet, ist Level 3 ganz offensichtlich das Level, welches am häufigsten in dieser Studie erreicht wurde.

Im folgenden Diagramm kann ein Trend für die allgemeine Entwicklung der Level beschrieben werden.

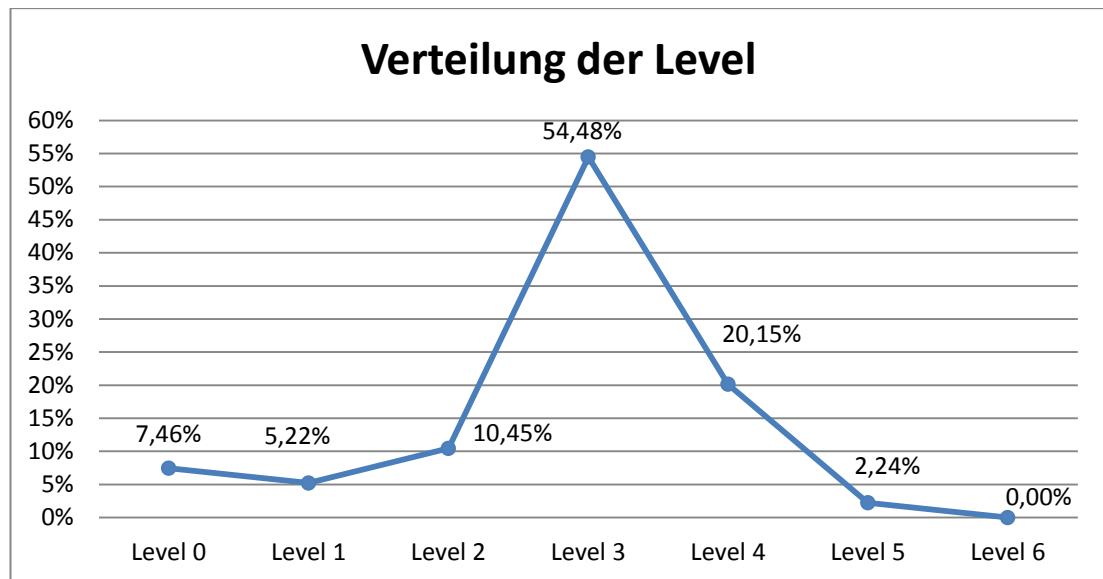


Diagramm 20: Prozentuale Verteilung der Level.

Was an der Graphik sehr deutlich zu erkennen ist, ist das Maximum mit 54,48% bei Level 3. Nach Level 3 tritt mit dem zweithäufigsten Aufkommen Level 4 auf, welches von 20,15% aller SuS erreicht wurde. Danach folgen Level 2 mit 10,45%, Level 0 mit 7,46%, Level 1 mit 5,22% und schließlich Level 5 mit 2,24%. Level 6 wurde gar nicht erreicht. Mit dem Maximum geht intuitiv einher, dass an dieser Stelle eine Hürde aufgetreten sein muss. Denn nach Level 3 weist die zeichnerische Darstellung einen starken Abfall dar. Sehr vielen SuS ist es nach Level 3 nicht gelungen, das nächst höhere Level zu erreichen. Daher muss hier eine allgemeine Schwierigkeit aufgetreten sein.

Weiterhin kann festgehalten werden, dass 22,39% der SuS (Level 4 + Level 5) höhere Level als Level 3 erreichen. Allerdings sind dem entgegengesetzt 23,13% der SuS (Level 0 + Level 1 + Level 2) nicht in der Lage, über das Vereinfachen bzw. Strukturieren der Aufgabe hinauszugehen. An den Zahlen ist zu erkennen, dass sich auf der linken Seite des Maximums etwa der gleiche Anteil der SuS befindet wie auf der rechten Seite des Maximums. D.h. etwa gleich viele SuS haben Level 0 bis Level 2 erreicht wie Level 4 und Level 5. Daraus kann die Erkenntnis gezogen werden, dass das Erreichen des vierten Levels eine enorme Hürde bedeutet. Die meisten SuS können die Aufgabe zwar verstehen und Informationen herausarbeiten, sind aber nicht in der Lage, mathematisch mit diesen zu arbeiten. Level 3 und Level 4 bilden damit in gewisser Weise die Hauptproblemstellen der Aufgabe. Viele SuS sind bis zu Level 3 gekommen, haben den nächsten Schritt aber nicht geschafft. Der Übergang

von der realen Welt in die der Mathematik ist damit vielen SuS gelungen, allerdings finden sich in der mathematischen Welt nur wenige SuS wirklich zurecht und liefern konkrete Ergebnisse. Das Arbeiten in der mathematischen Welt kann deshalb als allgemeines Hindernis der Bahn-Aufgabe beschrieben werden.

Insgesamt betrachtet wirkt das Gesamtergebnis der Studie damit eher ernüchternd, denn es wurden weniger hohe Level erreicht als es vielleicht zu erwarten wäre. Konkrete Erwartungen wurden zwar nicht formuliert, es wäre jedoch wünschenswert gewesen, wenn mehr SuS zu einem konkreten Ergebnis gekommen wären. Aber natürlich muss jedes erreichte Level wertgeschätzt werden. Schließlich stehen hinter all den Zahlen SuS, die sich Mühe bei der Lösung der Aufgabe gegeben haben. Nichtsdestotrotz ist nicht zu verleugnen, dass das Gesamtergebnis nicht absolut zufriedenstellend ist. Mit etwas mehr Übung und mehr Zeit, die für diese Aufgabenkultur genutzt werden würde, könnten die SuS mit Sicherheit langfristig auch bessere Ergebnisse erzielen.

An dieser Stelle sei aber noch einmal angemerkt, dass die Verwendung der Level nichts darüber aussagt, ob ein Schüler die Aufgabe gut gelöst hat. Zur Bewertung der individuellen Leistung gilt z.B. das bereits erwähnte Schema nach MAAß. Würden die Ergebnisse dieser Studie anhand der Level beispielsweise wie in einer Klassenarbeit bewertet werden, wäre das Ergebnis mehr als ernüchternd. Denn 77,61% aller SuS haben „nur“ Level 0, Level 1, Level 2 oder Level 3 erreicht. D.h. mehr als drei Viertel aller SuS haben kein konkretes Ergebnis erhalten. Für eine Klassenarbeit oder Ähnliches wäre das ein klägliches Ergebnis. Natürlich spielen bei der Bewertung auch andere Faktoren (wie z.B. die Dokumentation des Lösungsweges) eine Rolle. Dass aber so wenige konkrete Ergebnisse geliefert wurden, spricht nicht für eine gut ausgefallene Arbeit. Veranschaulicht wird dies mit folgender Abbildung.

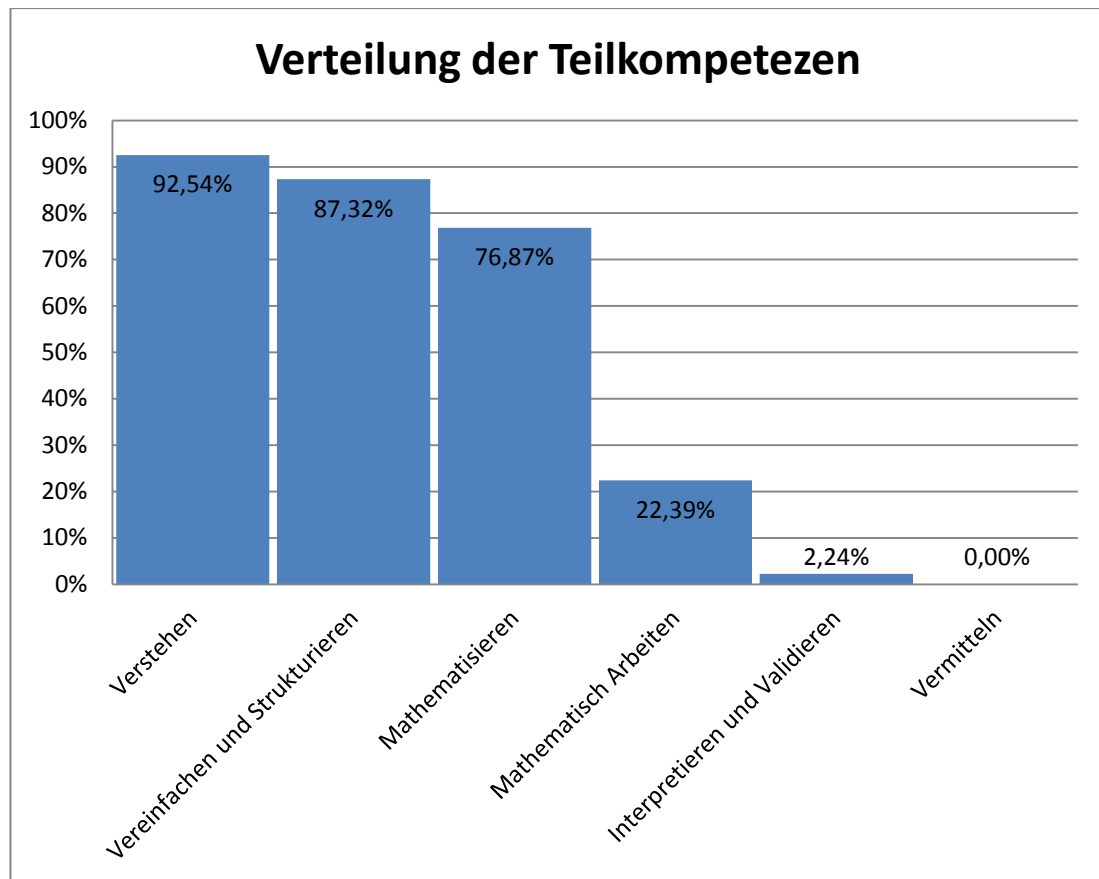


Diagramm 21: Erreichte Teilkompetenzen in absoluten Werten.

An dieser Abbildung wird das Gefälle der erreichten Teilkompetenzen des Modellierungskreislaufes deutlich. Sie zeigt, wie viele SuS den entsprechenden Teilschritt geschafft haben. Den Schritt des Mathematisierens haben viele SuS geschafft. Zu dem entsprechenden Prozentwert von 76,84% gehören alle SuS, die in der Lage sind, die Aufgabe zu mathematisieren, und auch die SuS, die darüber hinaus mathematisch arbeiten oder die Aufgabe interpretieren bzw. ihr Ergebnis validieren können. Doch dann ist ein großer Abriss zu erkennen, wodurch eine Art Gefälle entsteht. An dieser Stelle werden sozusagen 54,45% der SuS verloren, denen es nicht mehr gelingt, nach dem Mathematisieren auch mathematisch zu arbeiten. Dieses Gefälle bestätigt die zuvor getroffene Annahme, dass die größte kognitive Hürde bei dem Übergang von Level 3 zu Level 4 sein muss.

Wie an den Schülerergebnissen erkennbar ist, gibt es eine allgemeine Hürde, der die meisten SuS gegenüber standen. Darüber hinaus bieten aber auch viele weitere Stellen das Potential, Fehler zu machen. Jeder Teilschritt des Modellierungsprozesses stellt eine mögliche Hürde dar. Das haben auch schon Mathematiker wie MAAß oder

BLUM festgestellt. Eine Übersicht über die Fehler, die beim Durchführen des Modellierungsprozesses gemacht werden können, liefert MAAB (2004) und wird im Folgenden beschrieben. Ergänzend wird HINRICHS (2008) herangezogen. Er geht detailliert auf jeden Teilschritt des Modellierens ein und beschreibt potentielle Schwierigkeiten. Im Folgenden werden nun sowohl zu jedem Teilschritt des Modellierungskreislaufes einige¹⁷ exemplarische Modellbildungsfehler aufgezeigt, als auch Fehler beschrieben, die den kompletten Kreislauf betreffen. Die Beschreibungen der Fehler orientieren sich an MAAB (2004, S.160f.) und HINRICHS(2008, S.64-75) und werden durch Beispiele aus dieser Studie ergänzt.

Fehler beim Verstehen: Beim Verstehen der Aufgabe kann es passieren, dass diese zu anspruchsvoll für die SuS formuliert wurde. Bei der Bahn-Aufgabe ist der Fall eingetreten, dass die SuS viel Zeit benötigten, um die Aufgabe zu erfassen. Ihnen war oft erst nach dem Austausch mit dem Partner klar, was in der Aufgabe gefragt ist, welche Informationen gegeben sind und wie sie diese zielführend einsetzen können. Sollte die Aufgabe im Rahmen einer anderen Studie ebenfalls gestellt werden, müsste an diesem Punkt gearbeitet werden. Den SuS sollte ein schnellerer Zugang zu der Aufgabe möglich sein. Denn wenn sie anfangs Zeit für solche grundlegenden Sachen verlieren, fehlt sie ihnen im Anschluss bei der Bearbeitung des Problems. Vielleicht ist genau das der Grund, warum so viele SuS zu keinem konkreten Ergebnis gekommen sind und Level 3 nicht überschreiten konnten. Dennoch dürfen ihnen auch zum Verstehen der Aufgabe nicht zu viele Hilfestellungen gegeben werden, da die Modellierungsaufgabe sonst die Charaktereigenschaft der Offenheit genommen werden würde.

Fehler beim Vereinfachen und Strukturieren bzw. beim Aufstellen des Realmodells: An dieser Stelle haben manche SuS Schwierigkeiten, Informationen richtig herauszufiltern. Sie müssen sich aber trauen, nur die wichtigsten Angaben zu nutzen und die übrigen zu ignorieren. Einige SuS waren dazu nicht in der Lage und haben alle Informationen notiert, die sie der Aufgabe entnehmen konnten. So hat ein Schüler z.B. die Fahrtzeiten zu den einzelnen Strecken notiert (Lösungsweg 9). Er hat für sich dadurch eine Übersicht erstellt und versucht, damit die Aufgabe zu lösen,

¹⁷ Die Literatur liefert sehr viel mehr Fehler als die hier beschriebenen. Es werden aber nur ausgewählte Fehler geschildert, die auch von den SuS bei der Bahn-Aufgabe gemacht wurden.

was aber fruchtlos bleibt. Er hat also den Fehler gemacht, zu viele Informationen heranzuziehen statt zu idealisieren. Er wollte wohl ein möglichst genaues Ergebnis erhalten, da er es so aus dem Mathematikunterricht gewohnt ist.

Fehler beim Mathematisieren bzw. beim Aufstellen des mathematischen Modells: Für das Aufstellen eines mathematischen Modells müssen die SuS die nötigen Algorithmen beherrschen. Wollen sie die Aufgabe z.B. mit Hilfe von Zuordnungen und Funktionen lösen, müssen sie diese auch erstellen können. Das ist einigen SuS nicht gelungen. Sie haben Gleichungen erstellt, die ihnen plausibel vorkamen und wollten diese nach den Variablen auflösen, was ihnen nicht gelungen ist. Sie waren also nicht in der Lage, Formeln oder Algorithmen richtig anzuwenden.

Fehler beim Mathematischen Arbeiten bzw. beim Bearbeiten des mathematischen Modells: Der ärgerlichste Fehler, der beim Mathematisieren passieren kann, ist wohl der Rechenfehler. Trotz guter Idee resultiert ein falsches Ergebnis. Einige SuS haben den Flyer falsch verstanden und dadurch falsche Werte für Strecken berechnet. Viele von ihnen haben sich allerdings genau bei diesem Schritt so verrechnet, dass ganz andere Streckenlängen resultierten und das Modell dadurch zu ungenau geworden ist. Beträgt die Gesamtstrecke nicht mehr eine Länge von 1029km, sondern nur noch von knapp 800km, verfälscht das die Daten ungemein und liefert ein falsches Ergebnis. Oft bleibt die Bearbeitung des mathematischen Modells ergebnislos. Die SuS gelangen zu keiner Erklärung für die Entwicklung der Ticketpreise und beenden ihr Modell ohne Resultat.

Fehler beim Interpretieren: Die Interpretation gehört in dieser Studie zu Level 5 und wurde nur von drei SuS geleistet. Das größte Manko der Interpretation besteht wohl darin, dass sie schlichtweg fehlt. Fast alle SuS sind gar nicht erst bis zu diesem Schritt gekommen.

Fehler beim Validieren: Interpretieren und Validieren wurde in dieser Studie zu einem Level zusammengefasst. Denn die SuS, die ihr Ergebnis interpretiert haben, haben es auch gewissermaßen validiert. Sie haben z.B. nicht nur einen Kilometerpreis berechnet, sondern auch weitere und diese zum Vergleich herangezogen. Dadurch haben sie die Aufgabe mit ihrem Ergebnis beantwortet,

zusätzlich aber auch weitere Vergleichsobjekte hinzugezogen, was zu dem Teilschritt des Validierens gezählt werden kann, da der eigene Wert durch den Vergleich überprüft wird. Allerdings kann es auch vorkommen, dass zu oberflächlich validiert wurde. Das ist z.B. der Fall, wenn vom Schüler ein Ergebnis nur als ungenau bezeichnet wird, er aber nicht begründet, wieso es ungenau ist und auch keine Alternative zu einem genaueren Ergebnis liefert.

Fehler beim Vermitteln: Für das Vermitteln des eigenen Modells sind vor allem kommunikative Kompetenzen notwendig. Die SuS müssen in der Lage sein, ihren Modellierungsprozess so zu dokumentieren, dass er für andere Mitschüler nachvollziehbar wird. In dieser Studie wurde kein einziges Modell dargelegt bzw. erklärt. Das kann daran liegen, dass die SuS nicht wussten, dass dies bei Modellierungsaufgaben gemacht werden sollte. Schließlich waren sie mit dieser Aufgabekultur noch nicht vertraut. Sollten sie in Zukunft öfter Aufgaben dieser Art lösen, würde sich das Bild sicher ändern.

Fehler, die den ganzen Modellierungsprozess betreffen: Es können Fehler auftreten, die keine einzelnen Teilschritte umfassen. Die SuS verlieren gelegentlich den Überblick über ihre Lösung. Sie haben vielleicht zu viele Informationen gesammelt, die sie gar nicht alle verwenden können. Oder sie wechseln zwischen den Teilschritten, sodass sie nicht mehr wissen, welchen Schritt sie als nächstes vollziehen sollten. Oft kommt es auch vor, dass die SuS frustriert abbrechen. Die SuS verlieren das Ziel aus den Augen und wissen nicht mehr, wie sie zum Ergebnis kommen. Der Weg dorthin wird unklar und deshalb wird die Aufgabe ergebnislos beendet. Vor allem die Zeit spielt beim Modellieren eine große Rolle. Dadurch, dass in dieser Studie die Bahn-Aufgabe etwas komplexer ist und eine gewisse Zeit zum Verständnis fordert, bleibt nicht mehr viel Bearbeitungszeit übrig. Die Beschränkung auf eine Schulstunde ist ein großes Problem. Aus organisatorischen Gründen konnte diese Aufgabe aber nicht für Doppelstunden gestaltet werden. Daher war damit zu rechnen, dass keine perfekten Lösungen zustande kommen. 45 Minuten sind zur Lösung der Bahn-Aufgabe knapp bemessen (was auch dadurch bestätigt werden kann, dass nur einzelne SuS zu konkreten Ergebnissen gelangt sind).

An dieser Stelle sei HINRICHS zitiert, der „Fehler als Chance zum Lernen“ (HINRICHS 2008, S.75) beschreibt und sie dadurch positiv darstellt. Er fordert gewissermaßen den kritischen und konstruktiven Umgang mit Fehlern. Jeder gemachte Fehler kann den SuS aufzeigen, wie die Aufgabe besser gelöst werden könnte. Sie merken sich diese Dinge für die nächste Modellierung und verbessern so schrittweise ihre Modellierungskompetenz.

BLUM hat sich ebenfalls mit den Schülerschwierigkeiten bei Modellierungsaufgaben beschäftigt. Er hebt drei Schwierigkeiten hervor, die er durch Beobachtungen aus Labor und Unterricht feststellen konnte. Aus jeder Schwierigkeit zieht er Folgerungen, die getroffen werden müssen, damit die Schwierigkeiten behoben werden können. Diese Schwierigkeiten und Folgerungen von BLUM (2006b, S.13f.) sollen nun kurz erwähnt werden.

Zu Beginn stellt er fest, dass alle Schritte des Modellierungskreislaufes potentielle Hürden darstellen. Das kann die vorliegende Studie bestätigen. Wie schon erkannt, kann an jeder Stelle ein Fehler gemacht werden. Daraus ergibt sich die Folgerung, dass die einzelnen Teilkompetenzen mehr gefördert werden sollten. Gezielte Aufgaben zu den jeweiligen Schritten erleichtern es den SuS, den Kreislauf geordnet zu durchlaufen und bieten damit geeignete Hilfestellungen. Weiterhin führt BLUM auf, dass die SuS i.d.R. keine Lösungsstrategien bewusst benutzen und dadurch Hilflosigkeit bei ihnen auftritt. Das unterstützt die bereits genannte Annahme, dass die SuS sich nicht darüber im Klaren sind, welche einzelnen Teilschritte sie vollziehen sollten. Denn ebenso sind sie meist nicht in der Lage, bewusst eine Strategie anzuwenden, die sie ihrem Ergebnis näher bringt. Dieser Punkt sollte also unbedingt gefördert werden. Werden den SuS geeignete Strategien an die Hand gegeben, können sie einen Plan zur Problemlösung entwickeln und sich schrittweise zum Ergebnis vorarbeiten. Bewusst genutzte Strategien würden diesen Weg ungemein erleichtern. Im Rahmen dieser Studie kann bestätigt werden, dass SuS keine bewussten Strategien verwenden. Zumindest sind in den Schülerlösungen keine zu erkennen. Die SuS scheinen die Aufgabe ohne zugrundeliegende Strategie anzugehen und intuitiv einen passenden Lösungsansatz zu wählen. Diesen verfolgen sie so weit wie möglich. Der letzte von BLUM aufgeführte Punkt betrifft das Arbeiten mit Unterstützung des Lehrenden im Vergleich zum Alleine-Arbeiten. Bei Letzterem wurden oft Überforderung und Hilflosigkeit festgestellt. Denn im bisherigen

Mathematikunterricht haben SuS Aufgaben gelöst, zu denen sie meist kurz zuvor gelernte Algorithmen anwenden mussten. Doch bei Modellierungsaufgaben stehen die SuS vor der Aufgabe, aus ihrem gesamten mathematischen Wissen passende Algorithmen zu finden. Sie müssen dazu ihr komplettes mathematisches Wissen abrufen und herausfiltern, welche Herangehensweise am geeignetsten erscheint. BLUM betont hierbei die gezielte Intervention seitens des Lehrers. Der Lehrende sollte versuchen, nur minimale und diagnosebasierte Hilfestellungen zu geben. Denn es sollte immer ein Gleichgewicht zwischen der Selbstständigkeit des Schülers und der Lehrerintervention herrschen. Der Schüler sollte möglichst viel alleine bewerkstelligen, kann aber bei Hilflosigkeit auf die Hilfestellung des Lehrers vertrauen. Diese sollte aber, wie bereits erwähnt, möglichst minimal bleiben.¹⁸ Bei der Durchführung der zugrundeliegenden Modellierungsaufgabe hat sich dieser Punkt als sehr schwierig erwiesen. Denn an vielen Stellen haben die SuS Hilfe beim Lehrenden gesucht, beispielsweise beim Lesen des Flyers, beim Nachvollziehen des Bahnstreckenverlaufes und bei der Berechnung der Streckenlängen. An diesen Stellen wurde immer wieder darauf hingewiesen, dass ein Austausch mit dem Partner möglich sei. Denn seitens des Lehrenden sollten möglichst keine Hilfestellungen gegeben werden, damit alle Klassen die gleichen Voraussetzungen haben und ihre Ergebnisse verglichen und analysiert werden können. Der Austausch mit dem Partner sollte deshalb helfen, grundlegende Schwierigkeiten zu lösen. Dabei musste aber sehr darauf geachtet werden, dass alle SuS dennoch möglichst selbstständig arbeiten und jeder Schüler seine eigene Lösung zu Papier bringt, da sich die Studie mit Ergebnissen jedes Einzelnen beschäftigt und nicht mit Arbeiten aus Partner- oder Gruppenarbeiten.

Zusammenfassend wurde erkannt, dass an jeder Stelle Schwierigkeiten für die SuS auftreten können- sowohl bei einzelnen Teilschritten als auch beim Modellieren allgemein. Die SuS scheinen noch nicht genügend mit diesem Aufgabentyp konfrontiert worden zu sein. Daher ist das Gesamtbild über die Schülerlösungen zu der Bahn-Aufgabe auch nicht außerordentlich positiv. Es konnten zwar sehr viele verschiedene Lösungswege festgestellt werden und auch die Auswertung der Level erbrachte ein Ergebnis. Würden die Schülerlösungen aber einer Bewertung

¹⁸ LEISS hat sich sehr ausführlich mit dem Thema der Lehrerintervention beschäftigt. Zur Vertiefung in dieses Thema ist sein Werk „Hilf mir es selbst zu tun, Lehrerinterventionen beim mathematischen Modellieren“ sehr zu empfehlen.

unterliegen, die die Qualität misst, wie es bei Klassenarbeiten der Fall ist, könnten wahrscheinlich nur sehr wenige Leistungen als gut betitelt werden. Fast alle SuS hatten zwar Ideen und Vorstellungen, kamen aber nur selten zu einem Ergebnis. Die Aufgabe hat sie zwar nicht überfordert, aber vor unbekannte Hindernisse gestellt (wie z.B. selbst herauszuarbeiten, welche Informationen zur Bearbeitung relevant sind). Nach einer Begründung für diese Tatsache wurde mit Hilfe der Schülerschwierigkeiten gesucht. Der fehlende Bezug zur Deutschen Bahn stellt einen exemplarischen Grund dar. Ein Hauptmerkmal, das nicht oft genug erwähnt werden kann, ist die Tatsache, dass Modellierungsaufgaben noch nicht weit genug Einzug in den Schullalltag gefunden haben. Durch Lehrerfortbildungen und Ähnliches tauchen solche Aufgaben allmählich in den Schulen auf. Daher sollte es ein Anliegen an werdende Mathematiklehrer sein, diesen Aufgabentypen weiter zu intensivieren und ihn zukünftig vollkommen in den Schulalltag zu etablieren. ´

4.4 Signifikanz-Test

Sowohl bei den Lösungswegen als auch bei den Level wurde die Auswertung eher intuitiv vorgenommen. Die Diagramme wurden begutachtet und markante Punkte, die aussagekräftig zu sein scheinen, wurden näher betrachtet und analysiert. Allerdings ist das keine exakte Vorgehensweise, da nur Auffälligkeiten herausgearbeitet werden, die dem Betrachter ins Auge fallen. Es besteht dabei die Gefahr, dass der Betrachter gewisse Dinge nicht wahrnimmt, die aber von Wichtigkeit wären, oder manchen Dinge vielleicht auch überinterpretiert, obwohl sie mathematisch gesehen nicht aussagekräftig sind. Mathematisch betrachtet kann daher durch die subjektive Interpretation der Diagramme nicht festgemacht werden, ob tatsächlich signifikante Unterschiede zwischen gewissen Merkmalen vorhanden sind. Um dies zu überprüfen, bedarf es eines Signifikanz-Testes. Da ordinale Daten vorliegen und es sich um unabhängige Stichproben handelt, wird der Mann-Whitney-U-Test verwendet. Mit diesem Test kann überprüft werden, „ob die zentrale Tendenz von zwei verschiedenen Stichproben unterschiedlich ist“ (<http://www.methodenberatung.uzh.ch/datenanalyse/unterschiede/zentral/mann.html>). Zur Durchführung des Testes wurden zwei Quellen herangezogen (zum einen der Online-Test auf der Seite <http://www.vassarstats.net/utest.html> und zum anderen der Online-Test auf der Seite <http://elegans.som.vcu.edu/~leon/stats/utest.html>). Mit dem ersten Test kann die Prüfgröße U und der p-Wert berechnet werden. Allerdings

rundet dieser Test die Berechnung des p-Wertes recht ungenau. Daher wird mit Hilfe des zweiten Testes und der im ersten Test berechneten Prüfgröße U ein genauerer p-Wert bestimmt¹⁹.

Für das Alter kann dieser Test nicht durchgeführt werden, da die Anzahl der jeweiligen Altersgruppen zu klein ist, um Aussagen über signifikante Unterschiede machen zu können (z.B. gilt für die 13-jährigen SuS $n=2$). Daher sind Unterschiede des Alters auf Unterschiede zwischen den Klassenstufen zurückzuführen, da in diesen eine gewisse Homogenität der Altersstufe vorherrscht. Aus den Merkmalen Geschlecht, Klassenstufe und Schule in Kombination mit den Lösungswegen und Leveln ergeben sich folgende p-Werte.

Tabelle 10: Übersicht aller p-Werte.

	Lösungsweg	Level
Geschlecht	0,00319616	0,444454
Schule	0,1075694	0,77843
Klassenstufe	0,01617904	0,943772

Werden diese Werte bezüglich des Signifikanz-Niveaus überprüft, ergeben sich folgende Resultate.

Tabelle 11: Übersicht über die Signifikanz.

	Lösungsweg	Level
Geschlecht	sehr signifikant	nicht signifikant
Schule	nicht signifikant	nicht signifikant
Klassenstufe	signifikant	nicht signifikant

Die Level weisen bezüglich keines Merkmals eine Signifikanz vor. Dies bestätigt die Vermutungen, die bereits in der Auswertung getroffen wurden.

Die Ergebnisse für die Lösungswege sind sehr unterschiedlich. Zwischen den beiden Schulen besteht keine Signifikanz. Bezüglich der Klassenstufen kann aber eine vorherrschende Signifikanz ausgemacht werden. Sie ergibt sich womöglich aus dem Lernstoff der jeweiligen Klassen. Da in der neunten und zehnten Jahrgangsstufe unterschiedliche Themen behandelt werden, bearbeiten die SuS die Aufgabe womöglich anders, wodurch sich die signifikanten Unterschiede ergeben. Noch extremer ist dies bei den Geschlechtern vorzufinden. Hier besteht eine noch stärkere

¹⁹ Dieser Test berechnet zwei p-Werte, von denen der „two-tailed“ p-Wert betrachtet werden muss.

Signifikanz. Es kann also angenommen werden, dass Mädchen und Jungen unterschiedliche Lösungsansätze auswählen. Gründe dafür können nicht ausgemacht werden. Es kann nur wiederholt werden, was schon bei der Auswertung der Lösungswege erwähnt wurde. Jungen dominieren die Lösungswege, die auch außermathematische Erklärungen zulassen. Außerdem überwiegen sie in der Kategorie der unbrauchbaren Ansätze. Diese Tatsachen könnten u.a. Grund für die Signifikanz zwischen den Geschlechtern sein.

5. Schluss

Diese Studie hat einen Einblick in die theoretische Fundierung des Modellierens gegeben und diese durch empirische Daten ergänzt. Nun sollen die wichtigsten Ergebnisse der Studie abschließend kurz zusammengefasst werden. Darauf folgt ein Rückblick auf die Studie. Dabei wird u.a. betrachtet, wo Schwierigkeiten bei der Durchführung der Studie aufgetreten sind und sie verbessert werden könnte. Den Abschluss dieser Arbeit bildet ein Ausblick auf interessante Themen des Modellierens, die im Rahmen dieser Arbeit nicht ausgeführt werden konnten, da sie zu fortführend für diesen Zweck wären.

5.1 Fazit

An dieser Stelle sollen die wichtigsten Erkenntnisse festgemacht werden. Die Studie wird nun auf ihre wichtigsten Merkmale und aussagekräftigsten Feststellungen reduziert.

Die Studie wurde an zwei Frankfurter Schulen durchgeführt. Teilgenommen haben 134 SuS der Mittelstufe. Sie hatten 45 Minuten zur Lösung einer Modellierungsaufgabe Zeit, in der sie die Entwicklung der Ticketpreise einer ICE-Strecke von München nach Berlin erfassen sollten. Zur Bewertung ihrer Ergebnisse wurden die Lösungsblätter der SuS herangezogen. Die Aufgabe sollte in Einzelarbeit bewältigt werden, wobei ein Austausch mit dem Partner- sofern dies als nötig empfunden wurde- erlaubt wurde.

Insgesamt wurden elf verschiedene Lösungsansätze gewählt, wobei einer von ihnen als unbrauchbar betitelt wird. Die vielfältigen Varianten entstehen durch die unterschiedlichen Niveaus der SuS. Jeder Einzelne beschäftigt sich mit dem seinem mathematischen Niveau entsprechenden Lösungsansatz. Der Weg über die Streckenlänge (Lösungsweg 1) wurde am häufigsten verwendet. Fast ein Viertel der SuS ($n=32$) hat versucht, bestimmte Teilstrecken der ICE-Strecke zu berechnen und mit diesen Werten zu arbeiten. Entsprechendes wurde von vielen SuS ($n=21$) mit dem Preis versucht (Lösungsweg 4), wobei sie den Preis einer langen Strecke durch die Summe ihrer Teilstrecken bestimmen. Mit der Beziehung zwischen der Strecke und dem Preis (Lösungsweg 5) haben 18 SuS gearbeitet. Dieser Weg entspricht in etwa dem, der auch für die Musterlösung verwendet wurde.

Als zielführend wurden Lösungsweg 4 und Lösungsweg 6 beschrieben. Sie erreichen vergleichsweise hohe Level und scheinen daher Ansätze zu sein, die das Potential zu guter Leistung innehaben.

Zur Bewertung der Schülerlösungen wurde eine Einteilung in Level als geeignetes Raster gewählt. Dabei trennen die Level die Schülerlösungen aber nicht nach guten oder schlechten Lösungen auf. Zur Bewertung im Sinne von Benotung ist dieses Schema nicht geeignet. Die beschriebenen Level orientieren sich an dem Modellierungskreislauf und bestimmen, welche Teilschritte die SuS gemeistert haben. Über drei Viertel der SuS waren in der Lage, die Aufgabe zu mathematisieren (d.h. sie haben mindestens Level 3 erreicht). Level 3 bildet in der Statistik damit das Level, das anteilmäßig am häufigsten zugeordnet werden konnte. Etwa ein Viertel der SuS konnte dieses Level nicht erreichen und gehört maximal zu Level 2. Das höchste Level, das erreicht wurde, ist Level 5. Es kam nur drei Mal vor. Dies liegt u.a. daran, dass die SuS keine Möglichkeit hatten, ihre Ergebnisse mit echten Lösungen zu vergleichen und sich deshalb selbst Vergleichswerte erstellen mussten. An den Ergebnissen wird erkannt, dass es den meisten SuS gelungen ist, zu mathematisieren (Level 3). D.h. der überwiegende Teil hatte Ideen und Vorstellungen, wie die Aufgabe gelöst werden kann. Es ist aber nur wenigen SuS gelungen, zu einem konkreten mathematischen Ergebnis zu gelangen. Dennoch muss wertgeschätzt werden, dass die meisten SuS, ohne nennenswerte Erfahrungen mit Modellierungsaufgaben, einen Weg gefunden haben, mit dem die Problemstellung prinzipiell gelöst werden kann.

Mathematisch betrachtet gibt es nur an zwei Stellen signifikante Unterschiede. Zum einen zwischen den Klassenstufen bezüglich der Lösungswege und zum anderen (und hier sogar noch stärker) zwischen den Geschlechtern bezüglich der Lösungswege.

Im Abschnitt der kognitiven Hürden, wurde eine Stelle erkannt, die die meisten Schwierigkeiten zu bieten scheint. Dabei handelt es sich um den Übergang von Level 3 zu Level 4. Diesen Schritt haben 22,39% der SuS gemeistert. Viele SuS konnten die Aufgabe verstehen und mathematische Ideen entwickeln. Der Übergang von der realen in die mathematische Welt ist ihnen auch noch gelungen. D.h. die SuS konnten ihre Vermutungen zwar mathematisch beschreiben, waren darüber hinaus aber nicht in der Lage, sie auch mathematisch auszuarbeiten. Dies zeigt, dass die SuS Defizite im Bereich der mathematischen Welt aufgewiesen haben. Prinzipiell

wussten sie, was gefragt ist und konnten auch intuitive Argumentationen vorweisen. Diese mathematisch zu fundieren, ist vielen aber nicht gelungen. Sollten sie erst mal weitere Modellierungsaufgaben lösen, kann ihnen diese Hürde vielleicht genommen werden. Ihnen bekannte Aufgaben aus dem Mathematikbuch sind meist so gestellt, dass zuvor Gelerntes angewendet werden soll. Bei Modellierungsaufgaben ist dies aber nicht der Fall. Hier müssen die SuS ihr gesamtes mathematisches Wissen abrufen, um reale Probleme zu lösen. Diese Tatsache ist wohl neu für die SuS und deshalb fällt es ihnen ohne Vorkenntnisse zu Modellierungsaufgaben schwer, zwischen Mathematik und Realität zu übersetzen und tatsächlich reale Probleme mathematisch zu bearbeiten.

Gründe für die Hürden wurden zu einen im Speziellen und zum anderen im Allgemeinen betrachtet. Bei dieser Aufgabe scheint das Spezielle im Bezug zu der Deutschen Bahn und den Tickets zu liegen. Im Allgemeinen wurde erkannt, dass an jeder Stelle des Modellierungskreislaufes Schwierigkeiten auftreten können, wodurch das Erreichen eines nächsten Levels erschwert wird.

Mit Hilfe des Signifikanz-Testes wurde festgestellt, dass bezüglich der Lösungswege sowohl bei dem Geschlecht als auch bei der Klassenstufe eine Signifikanz aufgetreten ist. Ansonsten konnten keine Signifikanzen aufgezeigt werden.

Die Studie unterstützt die Aussage, dass Modellieren noch nicht fest in den Schulalltag etabliert wurde. Nur langsam ändert sich etwas an dieser Tatsache. Wie im Literaturverzeichnis zu sehen ist, gibt es schon mindestens seit den 1990ern Literatur und Forschungen zu mathematischem Modellieren. Und dennoch scheint es sehr lange zu dauern, bis dies Einzug in die Schulen gewinnt. Eigene Erfahrungen und auch Aussagen einiger Lehrpersonen bestätigen, dass der Mathematikunterricht bisher eher dem Schema entspricht, dass Neues gelernt, dieses mit Aufgaben gefestigt und durch einen Test geprüft wird. Raum für offene Aufgaben, wie Modellierungsaufgaben es sind, bleibt dabei nicht. Grund dafür kann unter anderem die Zurückhaltung der Lehrer sein. Sie sehen beispielsweise die Bewertung solcher Aufgaben als schwierig an und trauen sich nicht zu, diese durchzuführen. Hilfen sind in der Literatur aber zu Genüge zu finden, wie z.B. in den ISTRON Bänden. Sie weisen seit den 1990ern Modellierungskontexte auf, die die Verbindung von Mathematik und Realität fördern. Auch das DISUM Projekt beschäftigt sich mit der Förderung von Modellierungskompetenzen im Mathematikunterricht. Den Lehrenden können also Hilfen an die Hand gegeben werden, mit denen sie das

Modellieren in den Schulalltag integrieren können. D.h. nicht, dass der Weg zur Integration dieser Aufgabe leicht wird, aber sie ist möglich. MAAß hat Ähnliches in ihrer Studie erwähnt:

„Die Durchführung der Studie zeigt, dass es grundsätzlich möglich ist, Modellierungen auch unter den gegebenen Rahmenbedingungen in den Schulunterricht zu integrieren. Der 45-Minuten-Rhythmus, die traditionellen Methoden der Leistungsmessung sowie der Lehrplan stellen zwar keine optimalen Voraussetzungen aber auch keine unüberwindbaren Hinderungsgründe zur Integration von Modellierungsbeispielen dar.“ (MAAß 2004, S. 287)

Und dieser Aussage kann nur zugestimmt werden. Auch acht Jahre nach dieser Aussage hat sich nichts daran geändert, dass Modellierungsaufgaben mehr Zeit und Aufwand benötigen als die traditionellen Aufgaben. Dafür ist ihr Ertrag aber auch umso größer. Denn SuS erfahren durch sie, wie Mathematik nicht nur dazu dient, Aufgaben nach bekanntem Schema zu lösen, um gute Noten zu bekommen. Sie lernen auch, dass Mathematik außerhalb der Schule in jedem Alltag wiederzufinden ist und sich als äußerst nützlich erweisen kann. Diese Studie erbringt daher den Schluss, dass Modellieren eine Bereicherung für den Mathematikunterricht darstellt. Die Schülerergebnisse zeigen, dass noch viel Luft nach oben besteht. Die Integration in den Schulalltag ist aber grundsätzlich möglich. Der Weg dorthin ist zwar nicht leicht, wurde aber bereits gelegt und kann nun mit etwas Mut im Gepäck beschritten werden.

5.2 Rückblick

Nun soll reflektiert werden, an welchen Stellen Schwierigkeiten bei der Durchführung der Studie aufgetreten sind und wie diese verbessert werden könnte. Anschließend soll die Verwendung eines Videos als Aufgabenstellung aufgegriffen werden.

Von der Erstellung der Modellierungsaufgabe bis zur Durchführung an den Schulen sind gelegentlich Schwierigkeiten aufgetreten. Einige werden nun näher beschrieben. Die größte Schwierigkeit bestand wohl in der Suche nach Schulen, die sich an der Studie beteiligen wollen. Einige erwarteten Gegenleistungen dafür, dass pro Schulklasse eine Schulstunde für die Durchführung der Aufgabe zur Verfügung gestellt wurde. Diese Gegenleistungen beschrieben beispielsweise die Nachmittagsbetreuung für ein halbes Schuljahr. Nach zahlreichen Absagen haben sich schließlich zwei Schulen bereiterklärt, Unterstützung zu leisten. Der nächste

Schritt bestand darin, sich auf Termine zur Durchführung zu einigen. Denn durch bevorstehende Prüfungen, Sommerfeste o.ä. waren die Fachlehrer natürlich gewissermaßen gebunden und konnten nur kleine Zeitfenster bieten, in denen die Durchführung stattfinden konnte. Neben solchen organisatorischen Dingen stand dem Ganzen die Technik im Wege. Ohne Vorkenntnisse zur Erstellung eines Videos, erfordert dieser Punkt viel Zeit und Geduld. Doch wird dieses Hindernis erst überwunden, bahnt sich auch schon das nächste an. Die Modellierungsaufgabe zur Preispolitik der Deutschen Bahn ist an sich recht komplex. Es war davon auszugehen, dass die SuS die Aufgabe nicht auf Anhieb begreifen. Um diesen Schritt zu vereinfachen, sollte die Aufgabe etwas schülernah gestaltet werden. Daher wurde eine Geschichte von drei Freundinnen erstellt, die sich in den Sommerferien treffen wollen und den Weg mit der Bahn zurücklegen. Auch wenn die meisten SuS eher selten Urlaube mit der Deutschen Bahn in Angriff nehmen, so sollten die wie die SuS etwa gleichaltrigen Freundinnen den Zugang zur Modellierungsaufgabe auflockern. Bevor die Aufgabe an den Schulen durchgeführt werden konnte, mussten die nötigen Arbeitsmaterialien erstellt werden. Dafür mussten zunächst nötige Informationen beschafft werden. Dazu gehören u.a. die Ticketpreise für Teilstrecken der gewählten Linie. Doch nicht alle konnten über das Portal der Deutschen Bahn ermittelt werden und daher musste mit einer bereinigten Tabelle gearbeitet werden, d.h. mit einer Tabelle, der entsprechende Teilstrecken fehlen. Zudem ist es nicht möglich, einen Flyer eines ICE-Zuges zu erhalten. Der Flyer des ICE-Zuges 598 von München nach Berlin ist nur im entsprechenden Zug zu und nicht bei Informationsständen oder Schaffnern zu erhalten. Für nicht gerade wenig Geld könne man Pakete mit Hunderten Exemplaren online bestellen, so ein Schaffner, aber man dürfe nicht 30 Stück aus einem haltenden ICE entnehmen, wenn man kein Fahrgast sei. Daher blieb nur die Möglichkeit, einen einzigen Flyer zu erhalten, diesen 30 Mal zu kopieren und mit viel Zeit möglichst realitätsnah neu zusammenzubasteln.

Auch bei der Durchführung selbst haben sich Schwierigkeiten ergeben. Denn jede Klasse sollte dieselben Voraussetzungen haben, damit ihre Ergebnisse ohne Beeinträchtigung verglichen werden konnten. Daher musste sehr darauf geachtet werden, dass alle Klassen die gleichen Hilfestellungen erhalten. Außerdem war nur eine Schulstunde zur Durchführung möglich. Natürlich wäre es besser gewesen, wenn mehr als 45 Minuten zur Verfügung gestanden hätten. Allein durch das Zeigen des Videos und gegebenenfalls einer Wiederholung der Aufgabenstellung gehen fünf

bis zehn wertvolle Minuten verloren. Aber nur, wenn alle Klassen diese Möglichkeit bekommen hätten (was nicht der Fall war), wäre dies möglich gewesen. Daher musste die Aufgabe in einer Schulstunde bewältigt werden. Den SuS war klar, dass es bei der Schulstunde um etwas ging, das nichts mit ihrem üblichem Mathematikunterricht zu tun hatte. D.h. ihnen war bewusst, dass sie keine Note erhalten und ihre Leistung nicht in ihre Mathematiknote einfließen würde. Daher war einigen SuS anzumerken, dass sie die Bearbeitung der Aufgabe nicht ernst nahmen. Diese SuS haben die Stunde wohl als eine Art Freistunde empfunden, in der sie keine Leistung erbringen mussten (was auch ein Grund für die Erreichung niedriger Level darstellen kann). Viele andere SuS waren dagegen sehr motiviert und haben sich sogar mit netten Worten wie „Viel Erfolg bei Ihrer Arbeit“ verabschiedet.

Auch inhaltlich sind einige Hindernisse aufgetreten. Die Ausarbeitung und Zuteilung der Lösungswege war recht deutlich. Die Einteilung der Schülerergebnisse in Level hat sich aber als etwas schwieriger gestaltet. Zunächst mussten die Level klar voneinander abgetrennt definiert werden, um ihnen die Schülerlösungen zuordnen zu können. Viele Schülerlösungen konnten aber nicht immer ganz deutlich den Leveln zugeordnet werden, da nicht immer eindeutig war, in wie weit sie den Kriterien des zu erreichenden Levels erfüllen. Oft sind die Schülerlösungen quasi zwischen den Leveln einzuordnen. Bei solchen Fällen musste sehr genau untersucht werden, welchem Level sie eher entsprechen. Ebenso war es schwierig, deutliche kognitive Hürden auszumachen. Zwar ist anhand der Daten deutlich zu erkennen, dass nach Level 3 ein Abfall des Trends vorliegt, aber warum er gerade dort auftritt kann nur gemutmaßt werden. Daher war es etwas schwierig, erklärende Gründe aufzuführen. Durch den fehlenden Bezug zur Deutschen Bahn und der Tatsache, dass Modellierungsaufgaben noch nicht Einzug in Schule A und Schule B gefunden haben, konnten aber dennoch grundlegende Begründungen für Schülerschwierigkeiten aufgeführt werden.

Alles in allem sind an vielen Stellen Schwierigkeiten aufgetreten. Nichtsdestotrotz kann diese Arbeit eine gründlich geführte Studie vorweisen, dessen Ergebnisse aussagekräftig sind.

Wird auf die Studie zurückgeblickt, gibt es einige Punkte, die bei einer Wiederholung verbessert werden könnten. Schließlich handelt es sich bei dieser Studie um eine Pilotversion, d.h. die Aufgabe wurde in dieser Form vorher nicht getestet. Eine Möglichkeit der Verbesserung bestünde z.B. darin, die SuS an

Computern mit Tabellenkalkulationsprogrammen arbeiten zu lassen. Dadurch könnten sie Tabellen und Diagramme erstellen, die den Verlauf der Preisentwicklung visualisieren. Durch die Bearbeitung auf dem Papier würde dieser Vorgang viel Zeit in Anspruch nehmen und wurde deshalb wohl nur von 13,4% aller SuS gewählt (Lösungsweg 5 ähnelt dieser Methode, die auch für die Musterlösung verwendet wurde). „Zeitraubende Arbeiten, wie das Erstellen von Wertetabellen oder das Zeichnen von Funktionsgraphen, werden durch die Hilfsmittel übernommen.“ (SILLER 2009, S. 6) Die SuS könnten durch den Einbezug von Computern schneller zu Ergebnissen kommen, da sie aufwendige Schritte auslagern könnten. Doch der Einsatz von Computern birgt natürlich auch Gefahren. So dürfen die Risiken (z.B. dass die SuS sich am Computer mit anderen Dingen wie dem Surfen im Internet beschäftigen) nicht außer Acht gelassen werden.

Eine Verbesserung der Modellierungsaufgabe an sich könnte vorgenommen werden, indem die Längen der beiden Hauptstrecken von München nach Berlin und von Frankfurt nach Berlin vorgegeben werden könnten. Die SuS hätten dadurch immer noch genug Teilstrecken, die sie selbstständig berechnen müssten. Ihnen würden aber Rechenfehler erspart bleiben, die oft genau bei diesen beiden Strecken entstanden sind und dadurch zu falschen oder ungenauen Schlussfolgerungen führen. Außerdem sollten den SuS weniger Teilstrecken vorgegeben werden. Die in der Tabelle aufgelisteten ausgewählten Strecken wurden deshalb ausgesucht, weil sie bei einer Erstellung eines Graphen eine schöne Linie formen würden. Allerdings waren die SuS von der Anzahl der Teilstrecken scheinbar überfordert. Es fiel ihnen schwer, geeignete Strecken herauszufiltern, mit denen sie die beiden Hauptstrecken vergleichen konnten. Weiterhin hat ihnen das Lesen des Flyers große Schwierigkeiten bereitet. Vielen SuS war nicht bewusst, wie sie die Streckenlängen, die seitlich neben den Städtenamen notiert waren, lesen sollten. Ein abgeänderter Flyer, reduziert auf die wichtigsten Fakten (z.B. das Weglassen der Umstiegsmöglichkeiten an den einzelnen Bahnhöfen), hätte Ihnen die Arbeit sicherlich erleichtert. All diese Punkte könnten verändert werden, damit die SuS einen besseren Zugang zu der Aufgabe finden. Allerdings sei dabei hohe Vorsicht geboten. Denn je mehr die Aufgabe verändert wird, desto weiter entfernt sie sich auch von der realen Situation. Und genau um die geht es bei Modellierungsaufgaben schließlich. Die SuS sollen ein Problem so lösen, wie sie es in der realen Welt auch

auffinden könnten. Daher muss bei einer Umgestaltung der Aufgabe sehr darauf geachtet werden, den Modellierungscharakter der Aufgabe nicht zu verlieren.

Die Verwendung eines Videos für die Aufgabenstellung hat den SuS sichtlich gut gefallen. Sie waren ruhig und haben dem Film interessiert gefolgt. Eine Schulklasse hat sogar applaudiert, nachdem das Video das erste Mal gezeigt wurde. Auch die Lehrer haben interessiert den Einsatz dieses Mediums begutachtet. Insgesamt wurde es als gelungene Abwechslung entgegengenommen. In der Literatur kann noch nichts speziell zum Videoeinsatz im Mathematikunterricht gefunden werden. Untersucht wurde bisher eher der Einsatz von Computern oder anderen neuen Medien im Unterricht. So plädiert GREEFRATH beispielsweise dafür, dass der Medieneinsatz wünschenswert und die Verwendung realer Daten zudem förderlich sei (vgl. GREEFRATH 2009). Das würde dafür sprechen, dass durch den Einsatz von Computern (der zuvor auch als Verbesserungsvorschlag genannt wurde) viel intensiver mit realen Daten gearbeitet werden könnte. Denn dadurch entstünden exakte Ergebnisse ohne beispielsweise Zeichenungenauigkeiten beim Abtragen eines Graphen per Hand. Aber auch der Medieneinsatz hat natürlich seine Kehrseite. Die Einbettung des Videos hätte auch negative Konsequenzen tragen können. Die SuS hätten die Aufgabe z.B. nicht ernst nehmen können, da sie nicht wie gewohnt abgedruckt in einem Buch steht. Oder sie hätten sich so von der neuen Situation ablenken lassen können, dass sie dabei ganz versäumen, der Aufgabe zu folgen und sich z.B. zu sehr auf die Geschichte mit den drei Freundinnen zu konzentrieren als auf den mathematischen Kern der Aufgabe. ALSINA betont die Gefahr, die hinter moderner Technologie steckt. Denn Simulationen o.Ä. können die Realität natürlich nicht ersetzen (vgl. ALSINA 2007, S.43). Durch das Video kann auf keinen Fall die Realität ersetzt werden. D.h. Medien können den Mathematikunterricht zwar unterstützen, dürfen ihn aber nicht zu sehr einnehmen. Die SuS sollten nach wie vor auch ohne die Technologie in der Lage sein, solche Aufgaben zu lösen. Ein Video kann daher als nette Ergänzung dienen und ein wenig Abwechslung herbeiführen. Es darf aber nicht den Mittelpunkt einer Aufgabe bilden. Bei der Durchführung der Studie ist dies gut gelungen. Die SuS fanden das Video sehr schön und wurden motiviert, die Aufgabe zu lösen. Sie haben sich davon aber nicht beirren lassen und arbeiteten an einer Lösung für die Aufgabenstellung.

5.3 Ausblick

Im Mittelpunkt dieser Studie stehen die Lösungen der SuS aus der Mittelstufe. Ihr Lösungsraum, die erreichten Level und aufgetretene Schwierigkeiten wurden untersucht. Darüber hinaus gibt es aber natürlich auch weitere Themenbereiche, die im Zusammenhang mit den Ergebnissen dieser Studie sehr interessant sind. Eins davon soll nun ein Stückweit beschrieben werden.

Spannend wäre es z.B., Meinungen zum Thema „Integration von Modellierungsaufgaben im Schulalltag aus Lehrersicht“ zu untersuchen. Das Feedback bezüglich der entwickelten Aufgabenstellung seitens der Lehrer, die diese Studie begleiten durften, war äußerst positiv. Aber wären sie selbst auch bereit, den Modellierungsaufgaben mehr Raum in ihrem Unterricht zu geben? Wie stehen sie allgemein zu diesem Aufgabentypen? Durch Interviews o.ä. könnte dem näher auf den Grund gegangen werden. Welche Schwierigkeiten ergeben sich dabei für den Lehrenden?²⁰ Welche Hindernisse können entstehen? Die Beschaffung der Daten, die zur Verfügung stehende Zeit und die Bewertung sind nur einige Beispiele für Schwierigkeiten der Lehrenden. Vor solche und andere Probleme werden Lehrer gestellt, die Modellierungsaufgaben in ihren Mathematikunterricht integrieren möchten. Daher wäre es sehr interessant, die Umsetzung von Modellierungsaufgaben aus Lehrersicht, im Speziellen in Bezug auf die langfristige Integration dieser Aufgabekultur in den Schulalltag, zu untersuchen.

²⁰ Mit den Hindernissen aus der Lehrersicht hat sich BARBARA SCHMIDT auseinandergesetzt. Siehe Näheres dazu in: „Modellieren in der Schulpraxis-Beweggründe und Hindernisse aus Lehrersicht.“

6. Quellenverzeichnis

ALSINA, CLAUDI: Less chalk, less words, less symbols... More objects, more context, more actions. In: Modelling and Applications in Mathematics Education: the 14th ICMI study: Galbraith, Peter; Henn, Hans-Wolfgang; Niss, Mogens (Hrsg.). Springer, New York, 2007. S.35-44.

BLUM, WERNER: Vorwort. In: Anwendungen und Modellbildung im Mathematikunterricht: Blum, Werner (Hrsg.). Verlag Franzbecker, Hildesheim, 1993, V-VII.

BLUM, WERNER: Die Bildungsstandards Mathematik, Einführung. In: Bildungsstandards Mathematik: konkret, Sekundarstufe 1: Aufgabenbeispiele, Unterrichts Anregungen, Fortbildungsideen: Blum, Werner; Drücke-Noe, Christina; Hartung, Ralph; Köller, Olaf (Hrsg.). Cornelsen Verlag Scriptor GmbH & Co. KG, Berlin, 2006a, S.14-32.

BLUM, WERNER: Modellierungsaufgaben im Mathematikunterricht – Herausforderung für Schüler und Lehrer. In: Realitätsnaher Mathematikunterricht – vom Fach aus und für die Praxis: Bücher, Andreas; Humenberger, Hans; Prediger, Susanne (Hrsg.). Verlag Franzbecker, Hildesheim, Berlin, 2006b, S.8-23.

GREEFRATH, GILBERT: Modellieren lernen – mit offenen realitätsnahen Aufgaben. Aulis Verlag Deubner, Köln, 2006.

GREEFRATH, GILBERT: Examination tasks – with modelling problems and the use of technology? In: ICTMA 14, 2009.

GREEFRATH, GILBERT: Didaktik des Sachrechnens in der Sekundarstufe. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 2010.

HAINES, CHRISTOPHER: Drivers for mathematical modelling: pragmatism in practice. In touch with the real world! In: ICTMA 14, 2009.

HENN, HANS-WOLFGANG: Modell und Wirklichkeit. In: Strukturieren-Modellieren-Kommunizieren, Leitbilder mathematischer und informatischer Aktivitäten, Festschrift für Karl-Dieter Klose, Siegfried Krauter, Herbert Löthe und Heinrich Wölpert: Engel, Joachim; Vogel, Rose; Wessolowski, Silvia (Hrsg.). Verlag Franzbecker, Hildesheim, Berlin, 2005, S.77-91.

HINRICHS, GERD: Modellierung im Mathematikunterricht. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 2008.

LEISS, DOMINIK: „Hilf mir es selbst zu tun“, Lehrerinterventionen beim mathematischen Modellieren. Verlag Franzbecker, Hildesheim, Berlin, 2007.

LUDWIG, MATTHIAS; XU BINYAN: Blockages and barriers in students' work on modelling tasks. In: ICTMA 14, 2009.

MAAß, KATJA: Mathematisches Modellieren im Unterricht – Ergebnisse einer empirischen Studie. Verlag Franzbecker, Hildesheim, Berlin, 2004.

MAAß, KATJA: Modellieren im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I. In: Journal für Mathematik-Didaktik, Band 26, Heft 2, 2005, Seite 114-142.

MAAß, KATJA: What are modelling competencies? In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, Volume 38 (2), 2006, S.113-142.

MAAß, KATJA: Mathematisches Modellieren - Aufgaben für die Sekundarstufe 1. Cornelsen Verlag Scriptor GmbH & Co. KG, Berlin, 2007.

ROTH, NICOLE: Modellieren im Mathematikunterricht. In: Beiträge zum Mathematikunterricht, Vorträge auf der 35. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 5. Bis 9. März 2001 in Ludwigsburg: Kaiser, Gabriele (Hrsg.). Verlag Franzbecker, Hildesheim, Berlin, 2001, S.516-519.

SCHMIDT, BARBARA: Modellieren in der Schulpraxis – Beweggründe und Hindernisse aus Lehrerseicht. Verlag Franzbecker, Hildesheim, Berlin, 2010.

SCHUKAJLOW-WASJUTINSKI, STANISLAW: Mathematisches Modellieren – Schwierigkeiten und Strategien von Lernenden als Bausteine einer lernprozessorientierten Didaktik der neuen Aufgabenkultur. Waxmann, Münster, 2011.

SILLER, HANS-STEFAN: Realitätsbezogener Mathematikunterricht – Mathematik in unserer Umwelt. In: Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht, Band 13, Modellieren lernen: Maaß, Jürgen; Siller, Hans-Stefan (Hrsg.). Verlag Franzbecker, Hildesheim, Berlin, 2009, S.1-14.

WINTER, HEINRICH: Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. In: Materialien für einen realitätsnahen Unterricht, Band 8: Henn, Hans-Wolfgang; Maaß, Katja (Hrsg.). Verlag Franzbecker, Hildesheim, 2003, S.6-15.

BILDUNGSSTANDARDS im Fach Mathematik für den Hauptschulabschluss, Beschluss vom 15.10.2004.

BILDUNGSSTANDARDS im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss, Beschluss vom 4.12.2003.

DEUTSCHE BAHN: www.bahn.de (letzter Zugriff: 27.11.2012).

LEHRPLAN Mathematik, Bildungsgang Hauptschule.

LEHRPLAN Mathematik, Bildungsgang Realschule.

STATISTIKTEST: <http://elegans.som.vcu.edu/~leon/stats/utest.html> (letzter Zugriff: 27.11.2012).

STATISTIKTEST:

<http://www.methodenberatung.uzh.ch/datenanalyse/unterschiede/zentral/mann.html> (letzter Zugriff: 27.11.2012).

STATISTIKTEST: <http://www.vassarstats.net/utest.html> (letzter Zugriff: 27.11.2012).

TICKETPREISE: www.bahn.de (letzter Zugriff: 27.11.2012).

TRENDLINIE: <http://office.microsoft.com/de-de/help/auswahlen-der-besten-trendlinie-fur-ihre-daten-HP005262321.aspx>

7. Abbildungsverzeichnis

Abb. 1: Modellierungskreislauf nach BLUM UND LEISS (2005).	4
Tabelle 1: Übersicht über die an der Studie teilnehmenden SuS.	11
Tabelle 2: Übersicht aller Strecken nach Streckenlänge sortiert.	15
Diagramm 1: Preisentwicklung aller Teilstrecken.	17
Tabelle 3: Ausgewählte Strecken für SuS.	19
Diagramm 2: Preisentwicklung ausgewählter Strecken.	20
Abb. 2: Schülerlösung zu Lösungsweg 1.	26
Abb. 3: Schülerlösung zu Lösungsweg 2.	27
Abb. 4: Schülerlösung zu Lösungsweg 3 (Vorderseite).	28
Abb. 5: Schülerlösung zu Lösungsweg 3 (Rückseite).	29
Abb. 6: Schülerlösung zu Lösungsweg 4.	30
Abb. 7: Weitere Schülerlösung zu Lösungsweg 4.	31
Abb. 8: Schülerlösung zu Lösungsweg 5.	33
Abb. 9: Weitere Schülerlösung zu Lösungsweg 5.	34
Abb. 10: Schülerlösung zu Lösungsweg 6.	35
Abb. 11: Schülerlösung zu Lösungsweg 7.	37
Abb. 12: Schülerlösung zu Lösungsweg 8.	38
Abb. 13: Schülerlösung zu Lösungsweg 8.	39
Abb. 14: Schülerlösung zu Lösungsweg 9.	40
Abb. 15: Schülerlösung zu Lösungsweg 10.	42
Abb. 16: Schülerlösung zu Lösungsweg 11.	43
Tabelle 4: Gesamtübersicht über die Verteilung der Kriterien und Lösungswege. ...	44
Diagramm 3: Verteilung der Lösungswege.	45
Diagramm 4: Verteilung der Geschlechter auf die Lösungswege.	46
Diagramm 5: Verteilung der Klassenstufen auf die Lösungswege.	47
Diagramm 6: Verteilung der Altersgruppen auf die Lösungswege.	48
Diagramm 7: Verteilung der Schulen auf die Lösungswege.	48
Abb. 17: Schülerlösung zu Level 0.	54
Abb. 18: Schülerlösung zu Level 1.	55
Abb. 19: Schülerlösung zu Level 2.	55
Abb. 20: Schülerlösung zu Level 3 (Vorderseite).	57
Abb. 21: Schülerlösung zu Level 3 (Rückseite).	57
Abb. 22: Weitere Schülerlösung zu Level 3.	58

Abb. 23: Weitere Schülerlösung zu Level 3.	59
Abb. 24: Schülerlösung zu Level 4.	61
Abb. 25: Weitere Schülerlösung zu Level 4.	62
Abb. 26: Schülerlösung zu Level 5.	64
Tabelle 5: Gesamtübersicht über die Verteilung der Kriterien und Level.	65
Diagramm 8: Verteilung der Level.	66
Tabelle 6: Übersicht über die Verteilung des Alters auf die Level.	68
Diagramm 9: Verteilung der Level auf das Alter.	68
Diagramm 10: Verteilung des Alters auf die Level.	68
Tabelle 7: Übersicht über die Verteilung des Geschlechts auf die Level.	70
Diagramm 11: Verteilung des Geschlechts auf die Level.	70
Diagramm 12: Verteilung der Level auf die Geschlechter.	70
Tabelle 8: Übersicht über die Verteilung der Klassenstufen auf die Level.	71
Diagramm 13: Verteilung der Klassenstufen auf die Level.	71
Diagramm 14: Verteilung der Level auf die Klassenstufen.	72
Tabelle 9: Übersicht über die Verteilung der Schulen auf die Level.	73
Diagramm 15: Verteilung der Level auf die Schulen.	73
Diagramm 16: Verteilung der Schulen auf die Level.	73
Diagramm 17: Verteilung der Level auf die Lösungsweg in relativen Angaben.	76
Diagramm 18: Verteilung der Level auf die Lösungswege in absoluten Angaben. ..	76
Diagramm 19: Erreichte Level von Lösungsweg1, 6 und 11.	79
Diagramm 20: Prozentuale Verteilung der Level.	81
Diagramm 21: Erreichte Teilkompetenzen in absoluten Werten.	83
Tabelle 10: Übersicht aller p-Werte.	90
Tabelle 11: Übersicht über die Signifikanz.	90

8. Anhang

Im Anhang befinden sich die in der Unterrichtseinheit verwendeten Arbeitsmaterialien.

1. Arbeitsblatt mit der Aufgabenstellung und Preistabelle der gegebenen Teilstrecken

Deine Aufgabe:
Finde heraus, wie der Preisgenerator der DB funktioniert!

Als Hilfestellung dienen dir der Flyer der DB, die Deutschlandkarte und folgende Ticketpreise.

Von	Nach	Preis in €
Augsburg Hbf	Ulm Hbf	23,00
Augsburg Hbf	Braunschweig Hbf	125,00
Augsburg Hbf	Berlin Ostbahnhof	135,00
Braunschweig Hbf	Berlin-Spandau	56,00
Frankfurt (Main) Hbf	Hanau Hbf	13,00
Frankfurt (Main) Hbf	Göttingen	61,00
Frankfurt (Main) Hbf	Braunschweig Hbf	85,00
Frankfurt (Main) Hbf	Berlin Ostbahnhof	118,00
Fulda	Kassel-Wilhelmshöhe	30,00
Göttingen	Hildesheim Hbf	25,50
Hanau Hbf	Fulda	21,00
Hanau Hbf	Berlin-Spandau	110,00
Hildesheim Hbf	Braunschweig Hbf	14,00
Kassel-Wilhelmshöhe	Göttingen	19,50
Kassel-Wilhelmshöhe	Berlin Ostbahnhof	89,00
Mannheim Hbf	Frankfurt (Main) Hbf	27,00
Mannheim Hbf	Göttingen	74,00
Mannheim Hbf	Berlin Ostbahnhof	124,00
München Hbf	Hanau Hbf	95,00
München Hbf	Braunschweig Hbf	131,00
München Hbf	Berlin Ostbahnhof	135,00
München-Pasing	Augsburg Hbf	17,50
Stuttgart Hbf	Mannheim Hbf	37,00
Ulm Hbf	Stuttgart Hbf	25,00
Ulm Hbf	Frankfurt (Main) Hbf	66,00
Ulm Hbf	Berlin Ostbahnhof	135,00

2. Die Deutschlandkarte mit dem Verlauf der ICE-Strecke



3. Das Video

<http://www.youtube.com/watch?v=szNBW8ka6IU>

4. Das Schülerlösungsblatt (auf dem die SuS ihre Ergebnisse notiert haben und das anschließend zur Bewertung eingesammelt wurde, in DIN A4)

Deine Aufgabe:

Finde heraus, wie der Preisgenerator der DB funktioniert!

Klasse: _____ Geschlecht: _____ Alter: _____

5. Der Flyer des ICE 598

Fahrplanauskunft

ICE 598 München Hbf–Stuttgart Hbf–Frankfurt (Main) Hbf–Berlin Ostbahnhof

▼ München Hbf
ab 10:28

▼ München-Pasing
ab 10:36

▼ Augsburg Hbf
an 11:01
ab 11:03

Gleis 1

Bahncard-Kunden erhalten mit "City-Ticket" eine kostenlose Anschlussfahrt im Innenraum Augsburg + City (Tarifzonen 10 und 20).

11:06	RB 57021	Sa, So Augsburg-Hochzoll 11:11, weiter in Richtung München Hbf	Gleis 8
11:06	RB 57021/57223	Mo-Fr Augsburg-Hochzoll 11:11, weiter in Richtung München Hbf	Gleis 8
11:11	BRB 86522	Augsburg-Oberhausen 11:14 (11:13 Sa, So)	Gleis 5
11:14	BRB 86626	Mo-Fr Augsburg-Hochzoll 11:20, Aichach 11:42	Gleis 2 Süd
11:26	RE 59122	Mo-Sa Mertingen Bahnhof 11:50, Donauehrth 11:56, Treuchtlingen 12:20, Weilenburg (Bay) 12:35, Pleinfeld 12:44, Roth 13:00, Schwabach 13:08, Nürnberg Hbf 13:20	Gleis 7 Nord
11:28	RE 57526	Boibingen 11:36, Schwabmünchen 11:47, Buchloe 11:58, weiter in Richtung Memmingen	Gleis 9 Süd
11:28	RE 57906	Boibingen 11:36, Schwabmünchen 11:47, Buchloe 11:58, weiter in Richtung Bad Würtzshofen	Gleis 9 Süd
11:34	RB 57138	Mo-Fr Memtingen 11:53	Gleis 4
11:34	RB 57966	Mo-Fr Boibingen 11:47	Gleis 6 Süd
11:39	RE 57107/57307	Augsburg-Hochzoll 11:44, weiter in Richtung München Hbf	Gleis 8
11:45	BRB 86630	Augsburg-Hochzoll 11:51, Aichach 12:11, Schrobenhausen 12:24, weiter in Richtung Ingolstadt Hbf	Gleis 2 Süd

▼ Ulm Hbf
an 11:49
ab 11:51


Gleis 1

Bahncard-Kunden erhalten mit "City-Ticket" eine kostenlose Anschlussfahrt im Stadtgebiet Ulm/Neu-Ulm + City (Tarifzone 10/20).

11:56	RB 57767	Neu-Ulm 11:59, Illertissen 12:19, Memmingen 12:48, Mo-Fr, auch 31. Mär Kießlegg 13:33, Aulendorf 13:58	Gleis 7
11:57	IC 2012	"Allgäu" Göppingen 12:33, Plochingen 12:47, weiter in Richtung Hannover Hbf, Fr, Sa Magdeburg Hbf, 4., 18., 25. Mär Leipzig Hbf	Gleis 4
12:00	IRE 3228	Mo-Sa Giengen (Brenz) 12:23, Heidenheim 12:31, Aalen 12:50	Gleis Sa

12:05	IRE 3356	"IRE-SPRINTER" 12. bis 25. Mär Biberach (RR) 12:24, Ravensburg 12:50, Friedrichshafen Stadt 13:06, Radolfzell 13:52, Singen (Hohentwiel) 14:00, Schaffhausen 14:14, Erzingen (Baden) 14:27, Waldshut 14:41, Basel Bad Bf 15:17	Gleis 6 Süd
12:05	IRE 20406	"IRE-SPRINTER" 26. bis 31. Mär Biberach (RR) 12:24, Ravensburg 12:50, Friedrichshafen Stadt 13:06, Salem 13:26	Gleis 6 Süd
12:05	IRE 20556	"IRE-SPRINTER" 1. bis 11. Mär Biberach (RR) 12:24, Ravensburg 12:50, Friedrichshafen Stadt 13:06	Gleis 6 Süd
12:10	RE 19222	Amstetten (Württ) 12:26, Geislingen (Steige) 12:33, Göppingen 12:50, Plochingen 13:08, weiter in Richtung Stuttgart Hbf, Mosbach-Neckarelz	Gleis 3 Nord
12:12	IRE 4209	Biberach (RR) 12:34, Aulendorf 12:53, Ravensburg 13:06, Meckenbeuren 13:13, Friedrichshafen Stadt 13:24, Kressbrunn 13:39, Lindau Hbf 13:51	Gleis 3 Süd
12:13	RE 22524	Giengen (Brenz) 12:48, Heidenheim 12:58, Aalen 13:24, Ellwangen 13:46, Crailsheim 14:12	Gleis 4 Nord
12:15	IRE 3208	Ehingen (Donau) 12:38, Herberlingen 13:06, Sigmaringen 13:22, Tuttlingen 14:10, Immendingen 14:22, Donaueschingen 14:37, 1. bis 30. Mär Neustadt (Schwarz) 15:26	Gleis 6 Nord
12:16	RB 22613	Mo-Fr Biberach (RR) 12:45, Aulendorf 13:05, weiter in Richtung Stuttgart Hbf	Gleis 8
12:19	RE 57647	Illertissen 12:38, Memmingen 12:55, Kempten (Allgäu) Hbf 13:26	Gleis 4 Süd
12:24	RE 57109	Neu-Ulm 12:27, Günzburg 12:41, weiter in Richtung München Hbf	Gleis 25
12:28	RB 22562	Sa Langenau (Württ) 12:48	Gleis 6
12:28	RB 22582	Mo-Fr Rammingen (Württ) 12:53	Gleis 7
12:31	ag 84359	Mo-Fr Neu-Ulm 12:34, Günzburg 12:50, Dillingen (Donau) 13:06, weiter in Richtung Regensburg Hbf	Gleis 28
12:33	RB 22362	Ehingen (Donau) 13:09	Gleis Sa
12:34	RB 22563	Sa, So Laupheim Stadt 12:56, Sa Biberach (RR) 13:16	Gleis 4
12:34	RB 22583	Mo-Fr Laupheim Stadt 12:56	Gleis 4

Unser Angebot



Ferdinand Hodler, Enttäuschte Seele, um 1891/92, Kunstmuseum Basel, Vermächtnis Max Geldner 1958

Mit dem Kultur-Ticket-Spezial zur Ausstellung „Müde Helden. Ferdinand Hodler, Aleksandr Dejneka, Neo Rauch“.

Hamburger Kunsthalle 17.02.2012 bis 13.05.2012

Schaffen Neo Rauch erstmals in einem historischen Zusammenhang präsentiert. Zudem bietet Müde Helden die Gelegenheit, das Werk des in Russland geschätzten Aleksandr Dejneka zu entdecken. In thematischen Bezügen zu einer großen Werkgruppe ihres Vorläufers, dem Schweizer Ferdinand Hodler, erschließt sich so die historische Entwicklung vom „Neuen Menschen“ um 1900 zum zeitgenössischen „Müden Helden“.

Preis pro Person in der 2. Klasse 39 Euro bzw. 59 Euro in der 1. Klasse. Nur solange Vorrat reicht. Zugbindung. Fahrkartenkauf bis 3 Tage vor Reiseantritt. Kinder zwischen 6 und unter 15 Jahren reisen in Begleitung ihrer Eltern oder Großeltern kostenlos mit. Das Kultur-Ticket-Spezial ist bei gleichzeitigem Kauf oder Vorlage einer Eisenbahnkarte zum Ausreisepreis.

Stuttgart Hbf

an 12:47 ab 12:51



BahnCard-Kunden erhalten mit 'City-Ticket' eine kostenlose Anschlussfahrt im Stadtgebiet Stuttgart + City (Treffpunkt 20).

Table with 3 columns: Line number, Line name, and Platform. Includes lines like TOY 9974, LE 1313, and various regional services.

Mannheim Hbf

an 13:29 ab 13:31



BahnCard-Kunden erhalten mit 'City-Ticket' eine kostenlose Anschlussfahrt im Stadtgebiet Mannheim + City (Groszbahn Mannheim).

Table with 3 columns: Line number, Line name, and Platform. Includes lines like ICE 208, ICE 954, and various regional services.

Frankfurt (Main) Hbf

an 14:08 ab 14:13



BahnCard-Kunden erhalten mit Anschlussfahrt im Stadtgebiet Frankfurt (Main) (Treffpunkt 30 ohne Flughafen).

Table with 3 columns: Line number, Line name, and Platform. Includes lines like ICE 14, ICE 720, and various regional services.

Route nur gültig nicht 10., 11. Mär

Hildesheim Hbf nicht 10., 11. Mär
an 16:32
ab 16:54

Gleis 2



BahnCard-Kunden erhalten mit "City-Ticket" eine kostenlose Anschlussfahrt im Stützgebiet Hildesheim + City.

1643	RE 3612	Hannover Hbf 17:06	Gleis 3
1643	IC 3	Lehrte 17:05, weiter in Richtung Hannover Hbf	Gleis 7
1659	RE 14619	Braunschweig Hbf 17:45	Gleis 15
1737	IC 4	Hannover Messe/Laazen 17:29, weiter in Richtung Bornemühlen	Gleis 5

Fortsetzung in Braunschweig Hbf

Braunschweig Hbf

an 16:58 (10., 11. Mär 17:14)
ab 17:00 (10., 11. Mär 17:16)

Gleis 7



BahnCard-Kunden erhalten mit "City-Ticket" eine kostenlose Anschlussfahrt im Stützgebiet Braunschweig + City (Tarifzone 40).

1704	RE 14966	Gifhorn 17:37, Wittlingen 18:21, Uelzen 18:54	Gleis 1
1707	RE 14284	Wolfenbüttel 17:15, Vienenburg 17:41, Götting 17:55	Gleis 4
1731	IC 2047	Mo-Fr, So Magdeburg Hbf 17:55, Kölnen 18:28, Halle (Saale) Hbf 18:51, 4. Leipzig/Halle Flughafen 19:05, Leipzig Hbf 19:19	Gleis 7
1737	RE 17931	Heimstedt 17:44, Eildleben (b Magdeburg) 18:00, Magdeburg Hbf 18:29, Biederitz 18:42, Burg (Magdeburg) 18:57	Gleis 8
1720	RE 4884	Peine 17:36, weiter in Richtung Bielefeld Hbf	Gleis 5
1724	RE 27859	Mo-Fr Wolfsburg Hbf 17:48, Oebisfelde 17:58, Gardsleben 18:24, Giech 1	Gleis 4
1733	RE 14668	Mo-Fr Götting 18:05, Gifhorn Stadt 18:10	Gleis 1
1748	RE 14576	Schöppenstedt 18:11	Gleis 1
1751	IC 2344	Hannover Hbf 18:23, Nienburg (Weser) 19:11, Verden (Aller) 19:28, Bremen Hbf 19:51, Delmenhorst 20:04, Oldenburg (Oldb) 20:22	Gleis 6

Berlin-Spandau

an 18:07 (3., 4. Mär 18:55, 10., 11. Mär 18:20, 1. Mär 18:33, 2. Mär 18:18)

Gleis 5



1813	RE 37336	Wustemark 18:28, Rathenow 18:51	Gleis 3
1814	RE 18977	Berlin Hbf (tief) 18:24	Gleis 6
1815	RE 18926	Nauen 18:41	Gleis 4
1818	IC 5	Berlin Westkreuz 18:24, Berlin-Charlottenburg 18:34, Berlin Olympiastadion 18:35, Berlin Messe Süd (Eckkamp) 18:30, weiter in Richtung Strausberg Nord	Gleis 2
1819	RE 37385	Berlin Zoologischer Garten 18:27, weiter in Richtung Cottbus	Gleis 5
1825	IC 2071	nicht 11. Mär Berlin Hbf (tief) 18:33, Berlin Südkreuz 18:49, Eitzenwerd 20:07, Dresden Hbf 20:52	Gleis 5
1825	IC 2071	11. Mär Berlin Hbf (tief) 18:33, Berlin Südkreuz 18:49, Dresden Hbf 21:11	Gleis 5
1828	RE 18676	Mo-Fr Berlin Hbf (tief) 18:39	Gleis 5
1828	IC 5	Berlin Olympiastadion 18:35, Berlin Messe Süd (Eckkamp) 18:40, Berlin Westkreuz 18:42, Berlin-Charlottenburg 18:44, Berlin Zoologischer Garten 18:48, weiter in Richtung Hoppengarten (Mark)	Gleis 1
1833	RE 18653	Mo-Fr Berlin Gesundbrunnen 18:44	Gleis 6
1834	RE 18679	Mo-Fr Potsdam 18:45, Berlin Messe Süd (Eckkamp) 18:50, Berlin Westkreuz 18:52, Berlin-Charlottenburg 18:54, Berlin Zoologischer Garten 18:58, weiter in Richtung Strausberg	Gleis 2
1840	RE 37416	Nauen 18:53, Neustadt (Dosse) 19:18, Wittzenberge 19:49	Gleis 3
1846	RE 18976	Nauen 19:09	Gleis 3
1848	IC 5	Berlin Olympiastadion 18:35, Berlin Messe Süd (Eckkamp) 19:00, Berlin Westkreuz 19:02, Berlin-Charlottenburg 19:04, Berlin Zoologischer Garten 19:08, weiter in Richtung Hoppengarten (Mark)	Gleis 1
1849	RE 18933	Berlin-Charlottenburg 18:57, Berlin Zoologischer Garten 19:02, weiter in Richtung Berlin-Schönefeld Flughafen	Gleis 5
1850	RE 18787	Mo-Fr Wintermark 19:05	Gleis 6
1853	RE 37313	Berlin Hbf (tief) 19:02, weiter in Richtung Luckenwalde	Gleis 6
1858	IC 5	Berlin Zoologischer Garten 19:12, Berlin Messe Süd (Eckkamp) 19:10, Berlin Westkreuz 19:12, Berlin-Charlottenburg 19:14, Berlin Zoologischer Garten 19:18, weiter in Richtung Strausberg Nord	Gleis 2
1907	RE 18616	Mo-Fr Neuruppin West 20:27, Wittstock (Dosse) 20:56, Pritzwalk 21:16, Perleberg 21:40, Wittzenberge 21:53	Gleis 3
1907	RE 18616	Sa, So Neuruppin West 20:27, Wittstock (Dosse) 20:56, Pritzwalk 21:16, Perleberg 21:40, Wittzenberge 21:53	Gleis 6
1908	IC 5	Berlin Olympiastadion 19:15, Berlin Messe Süd (Eckkamp) 19:20, Berlin Westkreuz 19:22, Berlin-Charlottenburg 19:24, Berlin Zoologischer Garten 19:28, weiter in Richtung Berlin-Mahlsdorf	Gleis 1
1913	RE 37318	Mo-Fr Berlin-Charlottenburg 19:28, Rathenow 19:56	Gleis 3
1914	RE 18926	Mo-Fr Berlin Hbf (tief) 19:28	Gleis 5
1916	RE 18928	Nauen 19:41	Gleis 4

Unser Angebot



Unbedingt probieren:
Das City Night Line Mitfahrerangebot.
 Jetzt 50% auf die City Night Line-Aufpreise bei Buchung des Mitfahrerangebots mit Sparpreis/Europa-Spezial. Reisen Sie so zu zweit schon ab 98 Euro im Liegewagen entspannt über Nacht zum Beispiel nach Amsterdam, Berlin, Hamburg, Kopenhagen, Paris, Prag, Rom oder Zürich. Das bis zum 02.05.2012 buchbare Mitfahrerangebot gilt für alle City Night

Berlin Hbf
an 18221 (3., 4. Mär 1911, 2., 10., 11. Mär 1835, 1. Mär 1847)

- 1830 RE 69615 Berlin Zoologischer Garten 18:36, Berlin-Charlottenburg 18:40, G16s 16 Berlin Hbf (S-Bahn)
- 1832 RE 18355 1. bis 11. Mär Berlin Potsdamer Platz 18:34, Berlin Südkreuz 18:39, G16s 2 Berlin Hbf (Hbf/ief)
- 1837 RE 69615 1. bis 31. Mär Berlin Gesundbrunnen 18:37, G16s 2 Berlin Hbf (Hbf/ief)
- 1838 RE 18318 Berlin Zoologischer Garten 18:44, Berlin-Charlottenburg 18:48, G16s 5 Berlin Hbf (S-Bahn)
- 1841 RE 18186 Berlin Zoologischer Garten 18:45, Berlin-Charlottenburg 18:49, G16s 14 Berlin Hbf (S-Bahn)
- 1845 RE 69615 Berlin Zoologischer Garten 18:49, G16s 15 Berlin Hbf (S-Bahn)
- 1847 RE 2071 Dresden Hbf 20:52, G16s 1 Berlin Hbf (Hbf/ief)
- 1848 RE 4364 Berlin Gesundbrunnen 18:49, G16s 5 Berlin Hbf (Hbf/ief)
- 1849 RE 18270 Flutenberg (Havel) 18:44, Neustrelitz Hbf 19:38, G16s 16 Berlin Hbf (Hbf/ief)
- 1849 RE 18270 Berlin Zoologischer Garten 18:45, Berlin-Charlottenburg 18:49, G16s 16 Berlin Hbf (Hbf/ief)
- 1849 RE 18270 Berlin Zoologischer Garten 18:51, Berlin-Charlottenburg 18:55, G16s 16 Berlin Hbf (S-Bahn)
- 1849 RE 18270 Berlin Zoologischer Garten 18:51, Berlin-Charlottenburg 18:58, G16s 16 Berlin Hbf (S-Bahn)
- 1848 RE 18270 Berlin Zoologischer Garten 18:50, weiter in Richtung Altrensfelde, G16s 15 Berlin Hbf (S-Bahn)
- 1851 ICE 1517 Berlin Südkreuz 18:56, Luthernstadt Wittenberg 19:31, G16s 1 A-D Berlin Hbf (S-Bahn)

Berlin Ostbahnhof
an 18533 (3., 4. Mär 1922, 10., 11. Mär 1847, 1)

- 1851 ICE 1717 Berlin Südkreuz 18:56, Luthernstadt Wittenberg 19:31, Bittenfeld 19:53, Halle (Saale) Hbf 20:13, Naumburg (Saale) Hbf 20:51, Weimar 21:16, Erfurt Hbf 21:33, weiter in Richtung Eisenach, G16s 1 D-G Berlin Hbf (Hbf/ief)
- 1853 RE 75 Berlin Friedrichstr. 18:55, weiter in Richtung Berlin-Wartenberg, G16s 15 Berlin Hbf (S-Bahn)
- 1855 RE 18134 Berlin Zoologischer Garten 19:00, Berlin-Charlottenburg 19:04, Brandenburg Hbf 19:56, weiter in Richtung Magdeburg Hbf, G16s 13 Berlin Hbf (S-Bahn)
- 1855 RE 7 Berlin Zoologischer Garten 19:01, Berlin-Charlottenburg 19:05, Berlin Westkreuz 19:08, Berlin Wannsee 19:21, Potsdam Hbf 19:35, G16s 16 Berlin Hbf (S-Bahn)
- 1856 RE 5 Berlin Friedrichstr. 18:58, weiter in Richtung Hoggengarten (Mark), G16s 15 Berlin Hbf (S-Bahn)
- 1858 RE 5 Berlin Zoologischer Garten 19:04, Berlin-Charlottenburg 19:08, weiter in Richtung Berlin-Spandau, G16s 16 Berlin Hbf (S-Bahn)
- 1858 RE 7 Berlin Friedrichstr. 19:00, weiter in Richtung Altrensfelde, G16s 15 Berlin Hbf (S-Bahn)
- 1859 RE 18928 Berlin Zoologischer Garten 19:04, Berlin-Charlottenburg 19:07, G16s 14 Berlin Hbf (S-Bahn)
- 1901 RE 18127 Berlin Friedrichstr. 19:03, weiter in Richtung Frankfurt (Oder), G16s 12 Berlin Hbf (S-Bahn)
- 1903 RE 75 Mo-Fr Berlin Friedrichstr. 19:05, weiter in Richtung Berlin-Wartenberg, G16s 15 Berlin Hbf (S-Bahn)
- 1905 RE 37313 Berlin Potsdamer Platz 19:07, Berlin Südkreuz 19:11, Luthernstadt Wittenberg 19:34, G16s 1 Berlin Hbf (Hbf/ief)
- 1906 RE 5 Berlin Friedrichstr. 19:08, weiter in Richtung Strausberg, G16s 15 Berlin Hbf (S-Bahn)
- 1910 RE 18933 Berlin Friedrichstr. 19:12, weiter in Richtung Berlin-Schönefeld Flughafen, G16s 12 Berlin Hbf (Hbf/ief)
- 1911 RE 18749 Mo-Fr Berlin Potsdamer Platz 19:13, Berlin Südkreuz 19:18, Beetz-Heidestraße 19:51, Bad Belzig 20:14, G16s 1 Berlin Hbf (Hbf/ief)
- 1913 RE 75 Berlin Friedrichstr. 19:15, weiter in Richtung Berlin-Wartenberg, G16s 15 Berlin Hbf (Hbf/ief)
- 1916 RE 4365 Berlin Potsdamer Platz 19:19, Berlin Südkreuz 19:23, Luthernstadt Wittenberg 19:44, Jüterbog 20:02, Luthersstadt Wittenberg 20:29, G16s 12 Berlin Hbf (Hbf/ief)
- 1918 RE 18191 Berlin Friedrichstr. 19:21, weiter in Richtung Frankfurt (Oder), G16s 12 Berlin Hbf (Hbf/ief)
- 1920 RE 75 Mo-Fr Berlin Zoologischer Garten 19:26, Berlin-Charlottenburg 19:30, Berlin Westkreuz 19:33, G16s 16 Berlin Hbf (S-Bahn)
- 1921 RE 18269 Berlin Zoologischer Garten 19:25, G16s 14 Berlin Hbf (S-Bahn)
- 1923 RE 75 Mo-Fr Berlin Friedrichstr. 19:25, weiter in Richtung Berlin Ostbahnhof, G16s 15 Berlin Hbf (S-Bahn)
- 1925 RE 7 Berlin Zoologischer Garten 19:31, Berlin-Charlottenburg 19:35, Berlin Westkreuz 19:38, Berlin-Grunewald 19:41, G16s 16 Berlin Hbf (S-Bahn)
- 1926 RE 5 Berlin Friedrichstr. 19:28, weiter in Richtung Strausberg Nord, G16s 15 Berlin Hbf (S-Bahn)
- 1927 ICE 1206 Berlin Zoologischer Garten 19:21, Eberswalde Hbf 19:49, Anklam 20:17, Pasewalk 20:53, Anklam 21:18, Zossen 21:30, G16s 7 Berlin Hbf (Hbf/ief)
- 1928 RE 5 Berlin Zoologischer Garten 19:34, Berlin-Charlottenburg 19:38, weiter in Richtung Berlin-Spandau, G16s 16 Berlin Hbf (S-Bahn)
- 1932 RE 18317 1. bis 11. Mär Berlin Potsdamer Platz 19:34, Berlin Südkreuz 19:39, Zossen 20:18, Luckau-Ucker 20:56, Döberitz-Kirchham 21:15, Eitelwerda 21:34, G16s 4 Berlin Hbf (Hbf/ief)
- 1932 RE 69629 12. bis 31. Mär Berlin Potsdamer Platz 19:35, Berlin Südkreuz 19:40, Zossen 20:18, Luckau-Ucker 21:09, Döberitz-Kirchham 21:27, Eitelwerda 21:48, G16s 4 Berlin Hbf (Hbf/ief)
- 1933 RE 18356 1. bis 11. Mär Berlin Gesundbrunnen 19:37, Barmau (b Berlin) 19:51, Eberswalde Hbf 20:05, Britz 20:11, G16s 5 Berlin Hbf (Hbf/ief)
- 1933 RE 69614 12. bis 31. Mär Berlin Gesundbrunnen 19:37, Barmau (b Berlin) 19:51, Eberswalde Hbf 20:05, Britz 20:11, Angermünde 20:26, Schwedt (Oder) 20:57, G16s 5 Berlin Hbf (Hbf/ief)
- 1935 RE 7 Berlin Zoologischer Garten 19:41, Berlin-Charlottenburg 19:45, Berlin Westkreuz 19:48, Berlin Wannsee 20:01, Potsdam Hbf 20:15, G16s 16 Berlin Hbf (Hbf/ief)
- 1941 RE 18188 Berlin Zoologischer Garten 19:45, Berlin-Charlottenburg 19:49, Berlin Gesundbrunnen 19:49, Oranienburg 20:09, G16s 14 Berlin Hbf (S-Bahn)
- 1945 RE 18518 Löwenberg (Mark) 20:21, Gransow 20:29, Fustenberg (Havel) 20:44, Neustrelitz-Hbf 20:58, Neubrandenburg 21:29, Demmin 22:10, Grimmen 22:30, Stralsund Hbf 22:52, G16s 5 Berlin Hbf (Hbf/ief)
- 1952 ICE 1550 So Luthernstadt Wittenberg 20:34, Leipzig Hbf 21:06, Naumburg (Saale) Hbf 21:49, Weimar 22:15, Erfurt Hbf 22:32, weiter in Richtung Eisenach, Frankfurt (Main) Hbf 22:32, Berlin Zoologischer Garten 20:00, Berlin-Charlottenburg 20:04, G16s 1 Berlin Hbf (Hbf/ief)



Mario Adorf
AKADEMIE DER KÜNSTE
Der Preise kann ich auch Ausstellung 22. - 18. 4. 2012
Triebstr. Platz 4, 10117 Berlin, www.adk.de

- 1830 RE 69615 Berlin Zoologischer Garten 18:36, Berlin-Charlottenburg 18:40, G16s 16 Berlin Hbf (S-Bahn)
- 1832 RE 18355 1. bis 11. Mär Berlin Potsdamer Platz 18:34, Berlin Südkreuz 18:39, Zossen 19:18, Winozendorf-Waldstatt 19:32, G16s 2 Berlin Hbf (Hbf/ief)
- 1. bis 5. Mär Mo-Fr Luckau-Ucker 19:59, Döberitz-Kirchham 20:17, G16s 2 Berlin Hbf (Hbf/ief)
- 12. bis 31. Mär Berlin Gesundbrunnen 18:37, G16s 2 Berlin Hbf (Hbf/ief)
- 12. bis 30. Mär Mo-Fr Luckau-Ucker 19:59, Döberitz-Kirchham 20:17, Eitelwerda 20:34, G16s 2 Berlin Hbf (Hbf/ief)

- 1833 RE 18318 1. bis 11. Mär Berlin Gesundbrunnen 18:37, Barmau (b Berlin) 18:51, Eberswalde Hbf 19:05, Britz 19:11, Angermünde 19:26, Prenzlau 20:00, Pasewalk 20:17, Jatznick 20:30, Anklam 20:54, Zossen 21:07, Greifswald 21:22, Stralsund Hbf 21:44, G16s 5 Berlin Hbf (Hbf/ief)
- 1833 RE 69632 12. bis 31. Mär Berlin Gesundbrunnen 18:37, Barmau (b Berlin) 18:51, Eberswalde Hbf 19:05, Britz 19:11, Angermünde 19:26, Prenzlau 20:00, Pasewalk 20:17, Jatznick 20:30, Anklam 20:54, Zossen 21:07, Greifswald 21:22, Stralsund Hbf 21:44, G16s 5 Berlin Hbf (Hbf/ief)

- 1837 RE 75 Berlin Friedrichstr. 18:35, weiter in Richtung Berlin-Wartenberg, G16s 15 Berlin Hbf (S-Bahn)
- 1834 RE 37385 Berlin Friedrichstr. 18:36, weiter in Richtung Cottbus, G16s 11 Berlin Hbf (S-Bahn)
- 1835 RE 7 Berlin Zoologischer Garten 18:41, Berlin-Charlottenburg 18:45, Berlin Westkreuz 18:48, Berlin Wannsee 19:01, Potsdam Hbf 19:15, G16s 16 Berlin Hbf (S-Bahn)
- 1836 RE 5 Berlin Friedrichstr. 18:38, weiter in Richtung Hoggengarten (Mark), G16s 15 Berlin Hbf (S-Bahn)
- 1838 RE 5 Berlin Zoologischer Garten 18:44, Berlin-Charlottenburg 18:48, weiter in Richtung Berlin-Spandau, G16s 16 Berlin Hbf (S-Bahn)
- 1838 RE 7 Berlin Friedrichstr. 18:40, weiter in Richtung Altrensfelde, G16s 15 Berlin Hbf (S-Bahn)
- 1841 RE 18186 Berlin Zoologischer Garten 18:45, Berlin-Charlottenburg 18:49, G16s 14 Berlin Hbf (S-Bahn)
- 1845 RE 75 Berlin Zoologischer Garten 18:49, G16s 15 Berlin Hbf (S-Bahn)
- 1844 ICE 2071 Dresden Hbf 20:52, G16s 1 Berlin Hbf (Hbf/ief)
- 1844 ICE 2071 11. Mär Berlin Südkreuz 18:49, Dresden Hbf 21:11, G16s 1 Berlin Hbf (Hbf/ief)
- 1845 RE 4364 Berlin Gesundbrunnen 18:49, Oranienburg 19:09, Gransow 19:29, Flutenberg (Havel) 19:44, Neustrelitz Hbf 19:58, G16s 5 Berlin Hbf (Hbf/ief)

- 1849 RE 18270 Berlin Zoologischer Garten 18:51, Berlin-Charlottenburg 18:55, G16s 16 Berlin Hbf (Hbf/ief)
- 1849 RE 18270 Berlin Zoologischer Garten 18:51, Berlin-Charlottenburg 18:55, G16s 16 Berlin Hbf (S-Bahn)
- 1849 RE 18270 Berlin Zoologischer Garten 18:51, Berlin-Charlottenburg 18:58, G16s 16 Berlin Hbf (S-Bahn)
- 1848 RE 7 Berlin Friedrichstr. 18:50, weiter in Richtung Altrensfelde, G16s 15 Berlin Hbf (S-Bahn)
- 1851 ICE 1517 Berlin Südkreuz 18:56, Luthersstadt Wittenberg 19:31, G16s 1 A-D Berlin Hbf (S-Bahn)

6. Zeitungsartikel „Märchen Billigflieger“ (Quelle: Süddeutsche Zeitung, Printausgabe, 68. Jahrgang, 48. Woche, Nr. 276, 29.11.2012, S.21.)

Märchen „Billigflieger“

Eine Studie zeigt: Die Bahn ist günstiger als das Flugzeug

Berlin – Wer innerhalb Deutschlands ohne Auto verreisen will, hat die Wahl. Die Strecke von München nach Frankfurt kann man mit der Bahn in drei Stunden 22 Minuten zurücklegen. Das Flugzeug wäre zwar schneller, allerdings liegen die Flughäfen in Frankfurt und München weit entfernt vom Stadtzentrum. Für An- und Abfahrt würde also weitere Zeit anfallen, genauso wie fürs Einchecken.

Trotzdem gibt es immer noch viele, die sich auf dieser Strecke lieber in den Jet als in die Bahn setzen – genau wie auf anderen Inlandsstrecken: Insgesamt 24 Millionen Mal sind Menschen 2011 innerhalb Deutschlands geflogen. Für Michael Ziesak, Bundeschef des ökologisch orientierten Verkehrsclubs Deutschland (VCD), ist das nicht nachvollziehbar. Nicht mal der

der Bahn sogar noch stärker zum Ausdruck gebracht hätten.

So habe man bei den Preisen für die Zugtickets keine Bahncard berücksichtigt, obwohl sehr viele Bahnreisende eine besäßen. Zudem habe man immer die Kosten für eine Platzreservierung dazugerechnet, „weil man ja im Flugzeug auch einen garantierten Platz hat und nur dann das Ergebnis wirklich vergleichbar ist“, sagt Ziesak. Die Preise seien über das Internetportal www.bahn.de abgefragt worden.

Bei den Flugtickets dagegen habe man darauf verzichtet, die meist höheren Kosten für An- und Abfahrt zum Flughafen dazuzurechnen. „Dann hätte das Flugzeug allerdings nur noch schlechter abgeschnitten“, so der VCD-Vorsitzende. Die Preise für die Flugtickets wurden über das Internetportal www.billigflieger.de ermittelt. Es wird oft genutzt und schneidet bei der Stiftung Warentest am besten ab. Die dort ermittelten Preise seien mit den Preisen auf den Internetseiten der Flugfirmen selbst verglichen worden. Das jeweils günstigere Ticket wurde der Studie zugrundegelegt.

Eines der Ergebnisse, das den VCD am meisten verblüffte: Obwohl es bei der Bahn im Fernverkehr einen Tag vor Reiseantritt keine Sparpreise mehr gibt, ist auch das kurzfristig gebuchte Ticket deutlich günstiger als der Flug. Bei einer Spontanbuchung einen Tag vor der Abreise kann der Bahnfahrer sogar im Vergleich zum Flugreisenden am meisten sparen: bis zu 171 Euro pro Person. „Trotzdem sollte man seine Reise natürlich so früh wie möglich buchen“, sagt Ziesak. „Dann spart man zwar vielleicht gegenüber dem Flugticket keine 171 Euro, dafür aber ist das Zugticket generell billiger, wenn man noch einen Sparpreis erhält.“

Der Bundesverband der deutschen Luftverkehrswirtschaft (BDL) sieht die eigene Position durch das Testergebnis bestätigt. Das „Vorurteil des Billigfliegers“ sei damit widerlegt, sagt BDL-Präsident Klaus-Peter Siegloch. „Wir können die Bahnpreise schon allein aufgrund der Luftverkehrsteuer nur schwer unterbieten. Der entscheidende Vorteil des Fliegens bleibt aber für Geschäftsreisende wie Privatleute bestehen: Mit dem Flugzeug kommen sie schneller ans Ziel.“

Bereits seit elf Jahren testet der VCD die Bahn, jeweils mit einem anderen Schwerpunkt. Während 2011 die Qualität des Fernverkehrs im Fokus stand, ging es in diesem Jahr darum, was billiger ist: Bahnfahren oder Fliegen. Die Studien kosten den Verband nach eigenen Angaben im Schnitt 25 000 Euro. VCD-Bahnexperte Heidi Tischmann betont, dass man für die Untersuchungen keinerlei Geld von der Bahn erhalte. „Das würden wir auch gar nicht annehmen, weil das unsere Glaubwürdigkeit beschädigen würde.“ DANIELA KUHR

Bahnfahren ist billiger

Verhältnis Bahnpreis zum Flugpreis in Prozent

München – Frankfurt	47
Frankfurt – Hamburg	57
München – Düsseldorf	58
Düsseldorf – Berlin	59
Berlin – Frankfurt	60
Berlin – München	62
Hamburg – München	63
Köln/Bonn – München	67
Berlin – Stuttgart	67
Köln/Bonn – Berlin	77

SZ-Grafik; Quelle: VCD

Preis spreche fürs Fliegen. Auf den zehn Strecken mit den höchsten Fluggastzahlen sei die Bahn fast immer billiger. Das ist das Ergebnis des Bahntests 2012 des VCD. Das Hamburger Quotas-Institut untersuchte 270 Reiseverbindungen. Dabei wurden drei Reisearten unterschieden: die eintägige Geschäftsreise (morgens hin, abends zurück), den Wochenendurlaub für zwei Personen sowie die zweiwöchige Urlaubsreise für eine Familie mit zwei Kindern. Zudem wählten die Forscher vier Buchungszeiten: einen Tag vor der Reise, eine Woche vorher, vier Wochen vorher und drei Monate vorher. Das Ergebnis insgesamt: In 91,5 Prozent der untersuchten Fälle ist die Reise mit der Bahn günstiger. „Wir waren von dem Ergebnis sehr überrascht“, so Ziesak. Der „Mythos vom Billigflieger“ sei damit widerlegt. Und das, obwohl man bei dem Test viele Kostenfaktoren außer Acht gelassen habe, die im Zweifelsfall den Vorteil

9. Versicherung der selbstständigen Anfertigung

Ich versichere hiermit, dass ich die Arbeit selbstständig verfasst, keine anderen, als die angegebenen Hilfsmittel verwandt und die Stellen, die anderen benutzten Druck- und digitalisierten Werken im Wortlaut oder dem Sinn nach entnommen sind, mit Quellenangaben kenntlich gemacht habe.

Ort, Datum

Unterschrift des Verfassers